

Ein Massenspektrometer für kleinste Gasmengen.

VON FRIEDOLF SMITS und JOSEF ZÄHRINGER.

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 12. Januar 1955.)

A. Einleitung.

Bei massenspektrometrischen Untersuchungen von Gasen und Dämpfen kann man zwei Grenzfälle unterscheiden: Messungen großer Isotopenverhältnisse bei beliebigem Gasvorrat und Untersuchung kleinster Gasmengen auf weniger extreme Häufigkeitsunterschiede. So ließen sich einerseits Isotopenhäufigkeiten, die sich um sechs bis sieben Größenordnungen unterscheiden, genauer als 1% angeben [1]. Andererseits konnten z. B. an 10^{-3} bis 10^{-4} cm³ Xenon und Krypton, das im Uranreaktor als Spaltprodukt auftritt, Massenspektren aufgenommen werden [2], oder 10^{-6} bis 10^{-4} cm³ Helium aus Eisenmeteoriten Proben von He³ nachgewiesen werden [3].

Die im hiesigen Institut seit längerer Zeit durchgeführten Alterbestimmungen nach der Kalium-Argon-Methode [4], [5], [6], [7], [8] erfordern Häufigkeitsbestimmungen, die etwa beide Grenzfälle enthalten, d. h. Messungen großer Isotopenverhältnisse an sehr kleinen Gasmengen. Bei dieser Methode läßt es sich nämlich nicht sicher vermeiden, daß das aus K⁴⁰ durch K-Einwirkung gebildete A⁴⁰ beim Aufschließen und Reinigen durch Luftargon verunreinigt wird. Für die Altersbestimmung ist es daher notwendig, den Anteil des atmosphärischen Argons in der abgetrennten Argonmenge quantitativ zu bestimmen, was durch eine massenspektrometrische Analyse erfolgen kann. Luftargon ist etwa zu 1% in der Atmosphäre enthalten und besteht aus Isotopen A⁴⁰ (99,600%), A³⁸ (0,063%) und A³⁶ (0,337%) [9]. Der Luftargongehalt muß daher an einem bereits seltenen Isotop, zweckmäßigerweise an A³⁶ bestimmt werden. Um eine Luftverunreinigung von 1% noch zu erkennen, muß also ein Häufigkeitsunterschied von ca. $3 \cdot 10^4$ meßbar sein. Die zur Verfügung stehenden Gasmengen sind von der Größenordnung 10^{-3} bis 10^{-4} cm³. Ein Beispiel für eine Isotopenanalyse an noch wesentlich kleineren Gasmengen bei weniger extremem Isotopenverhältnis wird an einer Messung von He³ : He⁴ aus einem Eisenmeteoriten später diskutiert. Im Folgenden wird über die erreichte Meßgenauigkeit unseres Massenspektrometers berichtet. Die große Nachweisempfindlichkeit ist besonders auf die Konstruktion der Ionenquelle zurückzuführen. Diese wird daher ausführlicher diskutiert.

B. Prinzip der Ionenerzeugung.

Um Massenspektren an kleinen Gasmengen aufnehmen zu können, ist eine optimale Ionenausbeute (Verhältnis der am Auffänger entladenen Ionen zu den im Gasvorrat vorhandenen Atomen) anzustreben. Daneben kann man durch Steigerung der Empfindlichkeit des Nachweisgerätes (z. B. Multiplier) weiter an Empfindlichkeit gewinnen, der jedoch durch das Auf-

treten von Störlinien eine Grenze gesetzt ist, die durch das Verhältnis des Partialdruckes der Störlinie zu Partialdruck des Gases gegeben ist. Um den Gasdruck in der Ionenquelle zu erhöhen, haben wir den Austrittsspalt der Ionenquelle als Spaltkanal ($0,3 \times 3 \times 20$ mm) ausgebildet. So konnte auch der Gasverbrauch auf ein Minimum herabgesetzt werden und die Ionenausbeute auf einfache Art beträchtlich erhöht werden. Bei unseren Dimensionen ist die Halbwertszeit des Druckabfalles für Argon 3 min. Es soll nun im Folgenden skizziert werden, welche Ionenausbeuten unter unseren Bedingungen mit einer geeigneten Ionenoptik erreicht werden können.

Der Elektronenstrahl erzeugt in der Ebene I eine definierte Ionenstromdichte. Mit Hilfe einer geeigneten Ionenoptik soll nun ein möglichst breites Ionenbündel der Ebene I so abgebildet werden, daß es durch den Kanal von 0,3 mm Breite und 20 mm Länge hindurchgelangt. Im Prinzip leistet dies eine telezentrische Abbildung. Die in der Ebene I gebildeten Ionen haben jedoch auf Grund der thermischen Bewegung Anfangsgeschwindigkeiten, sodaß nach der HELMHOLTZschen Sinusbedingung nur ein Teil d_1 der von I ausgehenden Ionen in den Öffnungswinkel (d_2/l) gelangen. Durch ionenoptische Maßnahmen kann so die Ionenstromstärke prinzipiell nicht erhöht werden.

Die HELMHOLTZsche Bedingung lautet:

$$d_1 n_1 \sin \alpha_1 = d_2 n_2 \sin \alpha_2$$

mit d_2 = Spaltbreite in II, $n_1 \sim \sqrt{3 \cdot 10^{-2}}$ (Brechungsindex in I durch thermische Geschwindigkeit bedingt), $n_2 \sim \sqrt{1,5 \cdot 10^3}$ (Brechungsindex in II nach Beschleunigung mit 1,5 kV.)

α_1, α_2 Winkel der Ionenstrahlen in I und II bezüglich der Achse. Der minimale Bereich d_1 , dessen Ionen sicher alle durch d_2 gelangen können, ergibt sich mit $\sin \alpha_1 = 1$ und $\sin \alpha_2 = 0,15/20$ und obigen Werten zu 0,5 mm.

Zwischen dem Ionenstrom I_+ , der spezifischen Ionisierung s eines Gases, dem Partialdruck p , dem Elektronenstrom I_- und d_1 besteht nun folgende Beziehung [10]

$$I_+ = s p I_- d_1$$

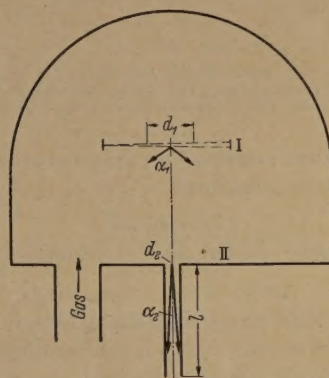


Abb. 1. Prinzip der Ionenoptik in der Ionenquelle. d_1 Breite der durch die Abbildung erfaßten Fläche im Formationsraum; d_2 Breite des Austrittskanals, α_1, α_2 Richtungswinkel der Ionen in den entsprechenden Ebenen I und II.

Mit $s = 10$ Ionen / Elektron \cdot cm \cdot Torr für Argon bei 100 eV Elektronenenergie [10] und $d_1 = 0,5$ mm wird

$$I_+ = 0,5 p I_-.$$

Mit einer Halbwertszeit von 3 min in dem Volumen V (etwa 2 l) hat man einen Gasverbrauch von $\frac{pV \ln 2}{p_0 T} \approx$

$10^{-2} p \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$. Da 1 cm³ Edelgas bei einfacher Ionisierung

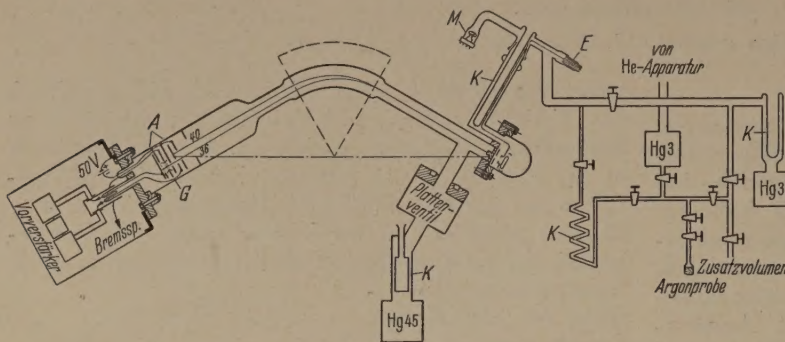


Abb. 2. Schematische Anordnung des Massenspektrometers. A Doppelauffänger, K Kühlfallen, E Einschmelzung für elektr. Versorgung der Ionenquelle, M Ionisationsmanometer, G Gegenfeldblende (Doppelgitter) Hg 45 u. Hg 3 Quecksilberdiffusionspumpen mit 45 u. 31/sec Saugleistung.

einer Ladung von 4,3 Coul entspricht, so ergibt sich die Ionenausbeute

$$\frac{\text{Ionenstrom}}{\text{Ladgs.-Äquiv. des Gasverbrauches}} = \frac{0,5 p I_-}{4,3 p 10^{-2}} = 11,6 I_-$$

So kann man mit einem Elektronenstrom $I_- = 1$ mA, der bei kleinem Druck in der Ionenquelle noch keine störenden Raumladungen erzeugt, unter obigen Bedingungen theoretisch eine Ionenausbeute von 1% erzielen. Mit unserem Gerät haben wir etwa 10% dieses Wertes erreicht.

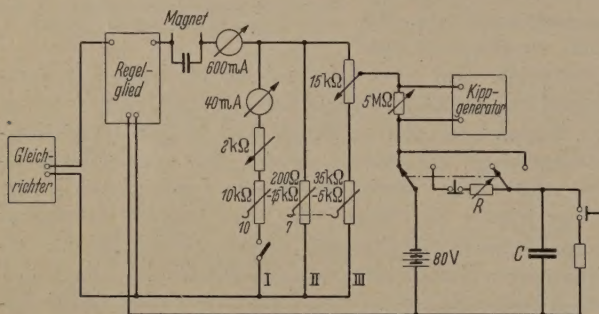


Abb. 3. Magnetstromregelung. Links: Gleichrichter und Regelglied. Mitte: Zweig I erlaubt einen zusätzlichen Querstrom zuzuschalten, Zweig II enthält die variablen Vergleichswiderstände zur Grobeinstellung des Magnetstromes, mit Zweig III wird der Abgriff der Vergleichsspannung zur Feinregelung des Stromes variiert. Rechts: Vergleichsspannung, Aufladekondensator und Kippgenerator zur automatischen Registrierung.

C. Der Aufbau des Spektrometers.

Der Aufbau der gesamten Anordnung geht aus Abb. 2 hervor. Die Ionenquelle selbst entspricht den üblichen in der Literatur beschriebenen Elektronenstoßionenquellen [10]. Der 60°-Sektormagnet wird aus einem Netzgerät gespeist. Die Einstellung der verschiedenen Massen erfolgt durch Ändern des Magnetstromes. Über einen Doppelauffänger werden die Ionenströme einem Zweikanalverstärker zugeführt und mit einem Doppeltintenschreiber registriert.

1. Gasführung.

Das Gas wird ohne Strömungsbremse durch eine mit flüssiger Luft gekühlte Glasspirale in die Ionen-

quelle eingelassen. Entsprechend der jeweiligen Gasmengen werden zusätzliche Volumina dazugeschaltet, wodurch der gewünschte Druck eingestellt wird und die Halbwertszeit des Druckabfalles vergrößert wird. Diese Art der Gasführung hat den Vorteil, daß zu Beginn der Messung noch keine Isotopenentmischung stattgefunden hat.

Zur Herabsetzung der störenden Kohlenwasserstofflinien erwies es sich als zweckmäßig, eine Ausfrierfalle für flüssige Luft in den Ionenquellenraum hineinragen zu lassen. Der äußere Mantel besteht aus Kupfer und ist mit den übrigen Teilen hartverlötet, so daß nur ausheizbare Teile mit dem Ionenquellenraum in Verbindung stehen.

Wie bereits erwähnt beträgt ohne Zusatzvolumen die Halbwertszeit des Druckabfalles (bei Argon) etwa 3 min, so daß eine einmalige Füllung des Ionenquellenraumes für eine Messung ausreichend ist.

2. Magnetstromregelung.

Der 60°-Sektormagnet hat eine hochohmige Wicklung, die mit maximal 500 mA betrieben wird. Der Magnetstrom wird elektronisch stabilisiert und geregelt. [11]. Das Prinzip dieser Anordnung ist aus Abb. 3 zu ersehen.

Eine Stromänderung läßt sich sowohl durch Variieren des Vergleichswiderstandes als auch durch Verändern der Vergleichsspannung erzielen. Der Vergleichswiderstand liegt in Zweig II. Stufenweise Veränderung ergibt die Grobeinstellung des Stromes. Dieser Widerstand ist durch ein hochohmiges Potentiometer mit Vorwiderstand überbrückt. An dem Abgriff des Potentiometers liegt der eine Pol der Vergleichsspannung. Als Vergleichswiderstand wirkt daher nur ein am Potentiometer einstellbarer Teil des Widerstandes in Zweig II. Durch diese Art der Schaltung ist erreicht, daß die Feinregelung lastfrei erfolgt. Der Vorwiderstand des Potentiometers wird mit der Grobeinstellung verändert, um damit den Strombereich der Feinregelung den einzelnen Grobbereichen anzupassen. Die Widerstandskette in Zweig I erlaubt einen zusätzlichen variablen Strom zuzuschalten, um einen festen Abstand zweier Linien einzustellen.

Zum Registrieren von einzelnen Linien und Spektren wird die Vergleichsspannung variiert. Durch Überlagerung einer langsamen Kippspannung über die Spannung der Batterie können einzelne Linien in laufender Wiederholung geschrieben werden. Zur Registrierung größerer Massenbereiche wird an Stelle der Batteriespannung die am Kondensator C liegende Spannung als Vergleichsspannung benutzt. Der Kondensator wird dabei über den Widerstand R aufgeladen. Durch geeignete Einstellung läßt sich die Aufladekurve des Kondensators über einen größeren Bereich einer Parabel annähern. Da die Masse dem Quadrat der Feldstärke proportional ist, erhält man so bei konstantem Papiervorschub des Tintenschreibers eine weitgehend lineare Massenskala.

3. Auffängeranordnung und Verstärker.

Die Anordnung des verwendeten Doppelauffängers entspricht im wesentlichen der erstmalig von NIER

ungegebenen Anordnung. [12]. Auf einer Platte wird die starke Linie aufgefangen und durch einen Schlitz in derselben die schwache Linie ausgeblendet. Zwischen diesem Schlitz und der zweiten Auffängerplatte haben wir eine Gegenfeldanordnung (Doppelgitter) eingeschaltet, die jedoch normalerweise nicht benötigt wird. Die Ströme der einzelnen Auffänger werden getrennt verstärkt und mit einem Doppeltintenschreiber registriert.

Als Verstärker dient ein gegengekoppelter Verstärker mit Schwingkondensator, der im wesentlichen

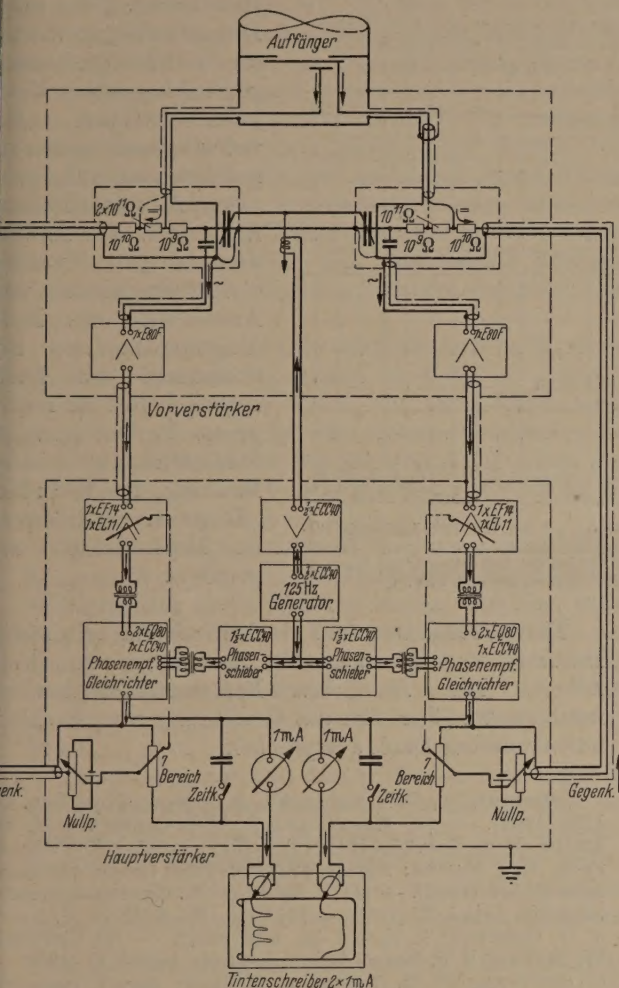


Abb. 4. Prinzipschaltbild des Verstärkers zur Messung des Ionenstromes.

einer von E. A. TRENDLENBURG entwickelten Schaltung entspricht [13]. Die am Hochohmwiderstand abfallende, dem Auffängerstrom proportionale Eingangsspannung wird mit einem Schwingkondensator in eine Wechselspannung umgewandelt. Diese Wechselspannung wird verstärkt und anschließend einem phasempfindlichen Gleichrichter zugeführt. Ein Teil der Ausgangsspannung wird auf den Fußpunkt des Eingangswiderstandes gegengekoppelt, um den Verstärker zu linearisieren und die Eingangszeitkonstante herabzusetzen.

Abb. 4 zeigt ein Prinzipschaltbild des Verstärkers. Ein 125 Hz Schwingkondensator der Firma Philips wurde mit zwei Plattensystemen versehen, so daß für beide Kanäle nur ein Schwingensystem notwendig ist. Die unmittelbar beim Schwingkondensator angeordneten Vorverstärker werden aus Batterien gespeist. Der sich anschließende Hauptverstärker ist zweistufig.

Als phasempfindlicher Gleichrichter dient eine Röhrenschaltung mit zwei EQ 80. Die Verstärker haben 7 Bereiche von 10 mV bis 10 V Vollausschlag. Beim Umschalten der Bereiche wird die Gesamtverstärkung derart geändert, daß jeweils die Verstärkung 10^3 (in den empfindlichen Bereichen nur 10^2 bzw. 3×10^2) gegengekoppelt wird. Die Zeitkonstante am Ausgang läßt sich durch Parallelschalten von Kapazitäten zu den Meßinstrumenten verändern. Mit 2×10^{11} Ohm Eingangswiderstand liegt die Nachweisgrenze bei einigen 10^{-15} Amp.

D. Messungen mit dem Gerät.

Im folgenden werden Anwendungsbeispiele des Gerätes gezeigt. Abb. 5 zeigt die Registrierung des Massenspektrums von Argon unter Verwendung beider Auffänger.

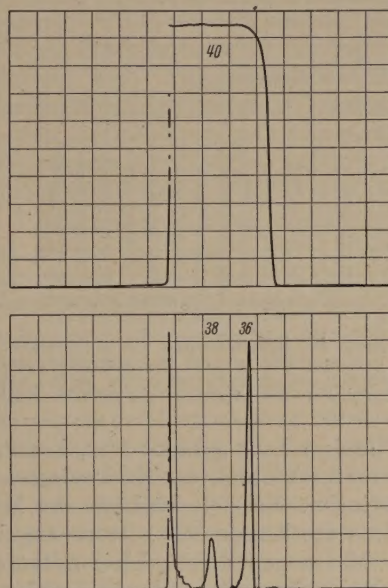


Abb. 5. Massenspektrum des Argons. Auf dem unteren Teil des Registrierstreifens ist der Ionenstrom des Hauptauffängers aufgeschrieben. Es wurden A^{38} , A^{36} und der Anstieg der Linie A^{40} registriert. Auf dem oberen Teil ist gleichzeitig der Ionenstrom der Linie A^{40} des vorderen Auffängers aufgeschrieben.

Die Magnetstromänderung erfolgte hier durch Kondensatoraufladung. Die Gegenfeldblende wurde auf das Potential des Formationsraumes gelegt, so daß nur geschwindigkeitstreue Ionen den Hauptauffänger erreichen konnten. Die Linie A^{40} konnte hierbei nicht auf dem Hauptauffänger registriert werden, da die eingestellte Ionenstromstärke den Verstärker übersteuert hätte.

Wie eingangs erwähnt, war die Hauptaufgabe des Gerätes die Messung des Luftargongehaltes in radiogenen Proben. Bei diesen Messungen kippen wir den Magnetstrom so, daß die Massenlinie 36 wiederholt geschrieben wird. Die Gegenfeldblende bleibt auf Erdpotential. Man erhält so Registrierkurven, wie Abb. 6a) und b) sie zeigen.

Aus dem Verhältnis der Linienhöhen von A^{36} zur A^{40} an radiogenem Argon und Luftargon läßt sich dann unmittelbar der Luftargongehalt der Proben angeben. Etwaige Störlinien auf der Masse 36 sind kleiner als $5 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 A^{36}$ entsprechen würde, was durch Blindversuche gesichert ist.

An einem weiteren Beispiel soll gezeigt werden, daß bei kleineren Häufigkeitsunterschieden an wesent-

lich geringeren Gasmengen noch befriedigende Messungen durchführbar sind. Wie von MAYNE [14] in Zusammenarbeit mit PANETH [3] erstmalig gezeigt werden konnte, ist in Eisenmeteoriten He^3 in nennenswertem Maße vorhanden. MAYNE hat in seinem Massenspektrometer He^3 von der HD-Störlinie trennen können. Als Nachweisgerät benutzte er einen Multiplier. Das Auflösungsvermögen unseres Gerätes erlaubt eine solche Trennung nicht. Wir mußten daher die HD-Störlinie reduzieren. Indem wir an die Stelle des Ionisationsmanometers ein Aktiv-Kohle-Rohr brachten,

sehr kleinen Gasmengen (10^{-4} cm^3) geeignet ist. I Nachweisempfindlichkeit ist einige 10^{-8} cm^3 , (gemessen an Ne und Ar-Isotopen) die durch eine gute Ionenaubeute und durch eine geeignete Registriervorrichtung erreicht wurde. Zur Abschätzung der möglichen Ausbeute wurden einige theoretischen Überlegungen angegeben. Die Art der Gasführung und eine spezielle Kühlfalle zum Ausfrieren der störenden Kohlenwasserstoffe in der Ionenquelle selbst wurde beschrieben.

Die Registrierung von einzelnen Linien und Spektren geschieht automatisch über den Magnetstromstabilisator. Über einen Doppelauffänger werden die Gleichströme einer gegengekoppelten Zweikanalverstärker mit Schwingkondensator zugeführt und auf einem Doppeltintenschreiber registriert. Als Anwendungsbeispiel werden ein Argonspektrum und Ausschnitte aus Meßdiagrammen zur Bestimmung des Luftargongehaltes an radioaktiven Proben gezeigt. Schließlich wird eine Messung des He^3 im Meteorhelium angegeben.

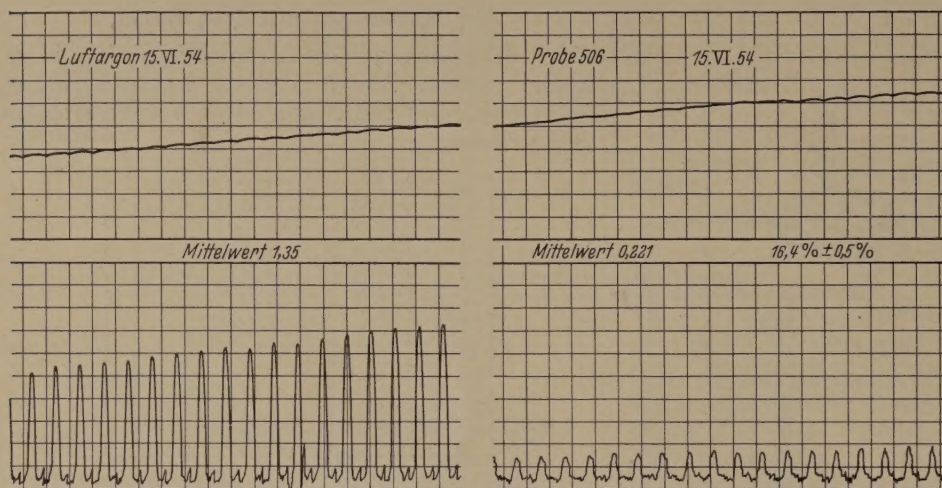


Abb. 6. Ausschnitte aus Meßdiagrammen von a) Luftargon; b) radiogenem Argon, welches mit 16% Luftargon verunreinigt ist. In beiden Fällen wird der Magnetstrom mit dem Kippsender so verändert, daß die Linie 36 mit der Periode von 20 sec wiederholt aufgezeichnet wird (untere Hälfte), während der zeitliche Verlauf des Ionenstromes der Masse 40 auf dem vorderen Auffänger von der oberen Hälfte des Registrierstreifens dargestellt wird.

das mit flüssiger Luft gekühlt war, konnten wir die HD-Störlinie leicht unter die Nachweisgrenze des Verstärkers bringen. Da sich die Höhe der HD-Linie an der H_2 -Linie abschätzen läßt, ist es angebracht, bei derartigen Messungen die H_2 -Linie mitzuregistrieren, um so die HD-Störampplitude laufend zu kontrollieren.

Wir haben 22,3 g Meteoreisen in einem Graphitiegel mittels Hochfrequenzerhitzung im Vakuum geschmolzen und den He-Gehalt in einer bereits früher beschriebenen Apparatur bestimmt. [7]. Es ergaben sich $2,7 \times 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ He}$. Diese Gasmenge wurde mit einer Förderpumpe in die Ionenquelle hineingeleitet. Der Magnetstrom wurde jeweils über eine Masselinie gekippt und vorher Zweig I und ein analoger weiterer Parallelwiderstand so eingestellt (Vgl. Abb. 4), daß schnell von Masse 4 auf Masse 2 und 3 umgeschaltet werden konnte. Die vor und während der Messung registrierte H_2 -Linie zeigt, daß durch HD keine Störung vorhanden sein kann. Unter Berücksichtigung des zeitlichen Abfalls erhalten wir z. B. $8 \pm 1\% \text{ He}^3$ im Meteorhelium eines uns zufällig zur Verfügung stehenden Meteorstückes.

Zusammenfassung.

Es wurde eine Massenspektrometer beschrieben, das zur Bestimmung großer Isotopenverhältnisse an

Herrn Prof. GENTNER danken wir für sein stetes Interesse und für wertvolle Anregungen zu dieser Arbeit. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft möchten wir hier für die Gewährung von Sachbeihilfen unseren Dank aussprechen.

Literatur. [1] L. T. ALDRICH u. A. O. NIER: Phys. Rev. **74**, 1225 (1948). — [2] MACNAMARA, J., C. B. COBBINS u. H. G. THODE: Phys. Rev. **75**, 532 (1949). — [3] PANETH, J. A., P. REESBECK, K. I. MAYNE: Nature **172**, 200 (1953) Geoch. cosmo. Acta **2**, 300 (1952). — [4] F. SMITS u. W. GENTNER: Geoch. cosmo. Acta **1**, 22 (1950). — [5] PAHL, M., J. HIBY, F. SMITS u. W. GENTNER: Z. Naturf. **5a**, 404 (1950). — [6] GENTNER, W., R. PRÄG u. F. SMITS: Geoch. cosmo. Acta **4**, 11 (1953). — [7] GENTNER, W., K. GOEBEL u. R. PRÄG: Geoch. cosmo. Acta **5**, 124 (1954). — [8] GENTNER, W., F. JENSEN u. K. R. MEHNERT: Z. Naturf. **9a**, 176 (1954). — [9] NIER, A. O.: Phys. Rev. **77**, 789 (1950). — [10] EWALD, H. u. H. HINTENBERGER: Methoden und Anwendungen der Massenspektroskopie, Verlag Chemie, Weinheim 1953. — [11] ELMORE, W. C. u. M. SANDS: Electronics Experimental Techniques, New York 1949. — [12] NIER, A. O.: Rev. Sci. Inst. **18**, 398 (1947). — [13] TRENDLENBURG, E. A.: Dipl. Arbeit, Freiburg i. Br. (1952). — [14] MAYNE, K. I.: Rep. Phys. Soc. Progr. Phys. **15**, 24 (1952).

Dr. FRIEDOLF SMITS

jetzt: Bell Telephone Lab. Murray Hill, U.S.A.

Dipl. Phys. JOSEF ZÄHRINGER,

Phys. Institut der Universität Freiburg i. Br.

Die Messung des zeitlichen Verlaufes der Dosisleistung an Röntgenimpulsanlagen mit dem Szintillationszähler.

Von HERBERT JAHN, Göttingen.

Mit 8 Textabbildungen.

(Eingegangen am 26. Januar 1955.)

I. Einleitung.

Die Messung des zeitlichen Verlaufes der Dosisleistung einer intermittierend verabfolgten Röntgenbestrahlung gewinnt, wie besonders die neueren Untersuchungen von WITTE [1], [2] über die biologische Wirkung der Ultrafraktionierung zeigen, steigende Bedeutung. Mit einem aus Photosekundärelektronen-vervielfacher (SEV) und geeignetem Leuchtphosphor bestehenden Szintillationszähler [3], [4] ist es möglich, den genauen Verlauf der Dosisleistung während der Einzelimpulse zu bestimmen und damit einen Beitrag zu dem Problem der Impulsdosismessung zu liefern.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden vorerst im Bereich der weichen und mittelharten Röntgenstrahlung mit Hilfe folgender Röntgen-Impulsanlagen durchgeführt:

a) Eine Anlage, bei der der Röhrenstrom durch ein Dreielektrodenrohr¹ gesteuert wird, dessen Gitter an einem Impulsgenerator mit Thyatron-Kippeschwingskreis gekoppelt ist. Bei einem einstellbaren Impuls-Pausen-Verhältnis von 1:4 bis 1:20 lassen sich Impulse von 10^{-1} bis $6 \cdot 10^{-4}$ sec Dauer erreichen. Die Röhrenspannung liegt zwischen 40 bis 95 kV.

b) Ein Röntgenrohr nach Art eines BRAUNschen Rohres mit eingebauten Ablenkplatten, die mit einem RC-Generator in Verbindung stehen und eine periodische Ablenkung des Elektronenstrahles von der Anode ermöglichen. Mit dieser Anlage sind Röntgenstrahlenimpulse bis annähernd zu 10^{-7} sec Dauer erreichbar. Die Betriebsspannung beträgt konstant 54 kV.

Da bei der unter a) beschriebenen Apparatur die Röhrenspannung und damit die Strahlenqualität sich während des Impulses erheblich ändert, mußte eine Messung der Dosisleistung unabhängig von der Wellenlänge gewährleistet sein. Außer der biologisch wichtigen Dosisleistung, gemessen in r/min [5], konnte noch die Röntgenstrahlenintensität (erklärt durch den

Quotienten $\frac{\text{Strahlungsenergie}}{\text{Flächeneinheit} \cdot \text{Zeiteinheit}}$) bestimmt werden.

Die Oszillographie der Intensitätsschwankungen der Strahlung gewöhnlicher Diagnostik- und Therapieapparate mit Hilfe des Szintillationszählers hat bereits HÜBNER [6] beschrieben. Dabei konnte der Autor den Einfluß der Glättung der am Röntgenrohr liegenden Spannung auf die Strahlungsintensität zeigen. Im vorliegenden Falle mußten Rechteckimpulse zwischen 10^{-2} und 10^{-6} sec Dauer möglichst verzerrungsfrei wiedergegeben werden, wobei im Gegensatz zu ähnlichen Messungen sehr kurzer Impulse (z. B. am Röntgenblitzrohr [7]) hier nur verhältnismäßig geringe Strahlungsintensitäten zur Verfügung standen. Bei einer Dosis von lediglich $3,3 \cdot 10^{-8} r$ je Impuls am Ort des Leuchtphosphors mußte eine einwandfreie Messung noch gewährleistet sein.

II. Meßgeräte.

Zur Messung des Fluoreszenzlichtes diente ein 11-stufiger SEV der Type VpJ 11tp 69¹ mit zugehörigem Netzanschlußgerät, das über einen Eisenwasserstoffwiderstand an 2 Phasen einer 380-Volt-Drehstromleitung angeschlossen war, eine Anordnung, wie sie von KORTÜM und MAIER [8] vorgeschlagen wird. Bei einer 5%igen Netzspannungsschwankung bleibt dabei die Eingangsspannung des Betriebsgerätes auf $\pm 1\%$ konstant.

Es zeigte sich, daß die Proportionalität zwischen dem Ausgangsstrom I_a des SEV und der Beleuchtungsstärke seiner Photokathode in weiten Grenzen zufriedenstellend war. Für genaue Messungen mußte jedoch der Multiplier wenigstens 2 Stunden vorermüdet werden, wobei seine Empfindlichkeit in den ersten 90 Minuten um etwa 20 % abfiel, um dann nach 120 min asymptotisch einen festen Wert zu erreichen.

Eine 1 mm starke Bleihaube schützte den SEV genügend gegen die unmittelbare Einwirkung der Röntgenstrahlung. Zusätzlicher Schutz des Lichteintrittsfensters durch Bleiglas erwies sich als unnötig. Eine sorgfältige elektrostatische Abschirmung war dagegen unumgänglich.

Zur Registrierung der Impulse diente ein mit Thyatron-Kippkreis und Gegentaktverstärker ausgerüsteter Kathodenstrahloszillograph, dem ein Zwischenverstärker von mindestens 1,6 MHz Bandbreite vorgeschaltet war (vgl. Abb. 6). Dieser Verstärker konnte zwei- oder dreistufig betrieben werden. Seinem Eingangswiderstand R lag ein Kondensator der Kapazität C parallel. Die Zeitkonstante dieses RC-Gliedes war so zu wählen, daß sie möglichst klein gegen die Dauer t des zu messenden Impulses, aber groß gegen die Dauer der Einzelimpulse war, die von den Einzelszintillationen herrühren und in ihrer Gesamtheit den Meßimpuls bilden. Für $2 \cdot 10^{-4} < t \leq 10^{-2}$ sec wurde beispielsweise $R = 10 \text{ k}\Omega$ und $C = 4000 \text{ pF}$ bei zweistufiger Zwischenverstärkung gewählt. Bei allen Impulsen mit $t \leq 8 \cdot 10^{-5}$ sec ist C im wesentlichen durch die nicht mehr zu vernachlässigenden Schaltkapazitäten gegeben. Als günstig erwies sich dabei $R = 1 \text{ k}\Omega$ bei dreistufigem Betrieb des Verstärkers.

Die Überprüfung der beschriebenen Geräte mit einem Rechteckimpulsgeber (Multivibrator) ergab, daß erst oberhalb einer Frequenz von 100 kHz eine merkbare Verzerrung der Impulse eintrat.

III. Auswahl und Prüfung der Leuchtstoffe.

Als Leuchtstoffe bewährten sich hier NaJ-Tl- und Stilben-Einkristalle, sowie Natriumsalicylat-Leuchtschirme.

Die Untersuchung der Wellenlängenabhängigkeit der Fluoreszenz der Leuchtstoffe erfolgte bei kontinuierlicher Bestrahlung mit Röntgenlicht verschiedener Härtegrades und verschiedener Dosisleistung im Bereich von 40 bis 95 kV. Da bei dieser verhältnis-

¹ Steuerventil der Firma C. H. F. Müller, Hamburg.

¹ Dr. MAURER, Neuffen.

mäßig weichen Strahlung die Absorption in den Kristallen beträchtlich ist, werden die Leuchtstoffe nicht homogen erregt. Demzufolge ist die Wahl der Anordnung des Kristalls vor dem Fenster des Multipliers nicht ohne Bedeutung.

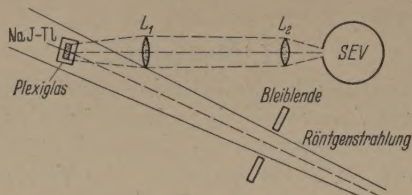


Abb. 1. Schema der Meßanordnung für den NaJ-Tl-Einkristall.

Der der Fluoreszenzintensität proportionale SEV-Ausgangsstrom wurde mit einem Galvanometer ($R_i = 5820 \text{ Ohm}$) gemessen. Die Konstanz des Röhrenstromes¹ konnte mit einer Genauigkeit von $\pm 0,5\%$ überprüft werden. Mit einer Kugelfunktenstrecke²

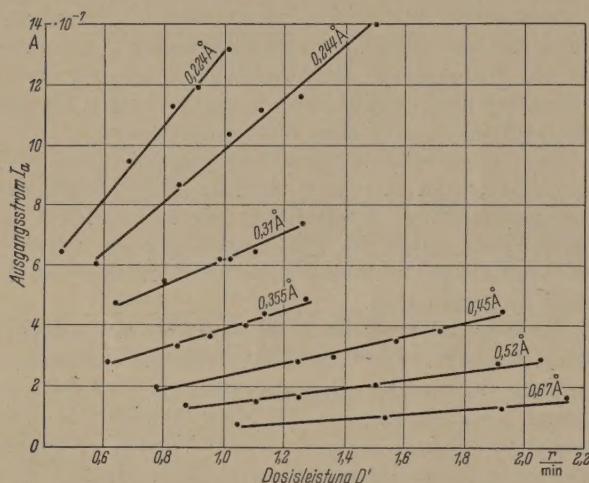


Abb. 2. Beziehung zwischen Ausgangsstrom und Dosisleistung bei verschiedenen Wellenlängen für NaJ-Tl.

ließ sich die Röhrenspannung auf $\pm 3\%$ genau bestimmen. Die mittlere Dosisleistung der Röntgenstrahlung wurde sowohl mit dem großen Eichstandgerät nach KÜSTNER [9], als auch mit einem Siemens-Momentan-Dosimeter mit Fingerhutkammer ermittelt, wobei

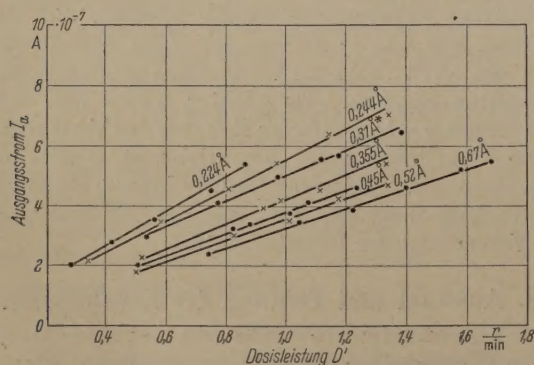


Abb. 3. Beziehung zwischen Ausgangsstrom und Dosisleistung bei verschiedenen Wellenlängen für Stilben.

letzteres seinerseits für alle vorkommenden Strahlenqualitäten mit dem Eichstandgerät verglichen worden war. Durch Bestimmung der Strahlungsschwächung

in 1 mm Cellon konnte die Absorption der Luft zwischen dem Röntgenrohr und dem Meßort berücksichtigt werden [10]. Aus den gemessenen Halbwertschichten der durch Al- und Cu-Filter stark homogenisierten Röntgenstrahlung ergab sich deren effektive Wellenlänge.

Abb. 1 zeigt das Schema der Meßanordnung für das NaJ-Tl, das sich für unsere Untersuchungen wegen seiner großen Fluoreszenzausbeute empfahl. Seine Abklingzeit von $2,5 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$ [4] kann sich im übrigen für Messung von Impulszeiten bis $\geq 10^{-5} \text{ sec}$ sicher nicht störend bemerkbar machen. Es wurde ein 10 mm dicker Einkristall¹ mit quadratischer Grundfläche von 20 mm Kantenlänge benutzt, der sich wegen seiner Hygroskopie in einem dünnwandigen zylindrischen, an seiner Rückseite mit Al-Folie bedeckten Plexiglasbehälter befand. Die Filterwirkung des Plexiglas wurde bei den Messungen mit berücksichtigt.

Bei den hier interessierenden Strahlenqualitäten (kürzeste effektive Wellenlänge $0,2 \text{ Å}$) wird der Kristall vorwiegend nur in einer verhältnismäßig dünnen Schicht an der Oberfläche erregt. So fällt z. B. die Intensität einer Strahlung von $0,2 \text{ Å}$ auf $0,044 \text{ cm}$ Weglänge bereits auf $1/e$ ab. Demzufolge wurde die Meßanordnung so gewählt, daß die Röntgenstrahlung möglichst senkrecht auf diejenige Kristallgrundfläche auftraf, die dem Multiplier zugewandt war. Die Sammlung des Fluoreszenzlichtes auf die Photokathode erfolgte mit Hilfe der beiden Linsen L_1 und L_2 , wobei L_2 möglichst nahe dem Kristall, aber noch außerhalb des Röntgenstrahlenkegels lag, so daß zur Vermeidung störender Sekundärstrahlung praktisch nur der von Perlonfäden getragene Kristall mit seinem Plexiglasschutz vom Röntgenlicht getroffen wurde [11].

In Abb. 2 ist für das NaJ-Tl die Abhängigkeit des SEV-Ausgangsstromes I_a von der Dosisleistung D' mit folgenden effektiven Wellenlängen λ_{eff} :

$0,67$; $0,52$; $0,45$; $0,355$; $0,31$; $0,244$; $0,224 \text{ Å}$ als Parameter dargestellt. Wie man sieht, besteht zwischen I_a und D' für jeden Wert von λ_{eff} strenge Proportionalität.

Die Untersuchung der Wellenlängenabhängigkeit der Lumineszenz des Stilbens, das wegen seiner kurzen Abklingzeit ($8 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$ [4]) für Impulsmessungen besonders geeignet ist, erfolgte mit einem 1 cm^3 großen Einkristall², der zur Fluoreszenzlichtsammlung mit dünner Al-Folie umwickelt war und an Perlonfäden 4 cm vor dem Lichtfenster des SEV befestigt wurde. Als Lichtleiter diente ein Rohr aus hochglänzender Al-Folie, dessen Streustrahlung zu vernachlässigen ist. Die Röntgenstrahlung trat hier senkrecht zur optischen Achse ein und war so ausgeblendet, daß wieder nur der Kristall im Strahlenkegel lag.

Wie aus Abb. 3 hervorgeht, zeigte sich auch hier, daß I_a der Dosisleistung D' für eine feste Wellenlänge λ_{eff} proportional ist.

Diese lineare Beziehung zwischen Ausgangsstrom und Dosisleistung bestätigte sich schließlich auch bei Verwendung eines Natriumsalicylat-Leuchtschirmes, der an Stelle des Stilben-Kristalles in den Al-Folien-Lichtleiter eingesetzt wurde. Siehe Abb. 4. Der Leuchtschirm von 2 cm Kantenlänge bestand aus

¹ Müller Media-Metalix-6-kW-Röntgenrohr.

² Kugeldurchmesser 12,5 cm (C. H. F. MÜLLER).

¹ D. KORTH, Kiel.

² Tracerlab inc. Boston USA.

0,125 mm starkem Cellon mit gleichmäßig aufgestreutem polykristallinen Natriumsalicylat.

Die verschiedenen Steigungen $\frac{\partial I_a}{\partial D'} \left(\frac{\text{Amp}}{r/\text{min}} \right)$ der in den Abbildungen 2, 3 und 4 gezeichneten Geraden ergeben nun für NaJ-Tl, Stilben und Natriumsalicylat die Abhängigkeit des Stromes I_a von der effektiven Wellenlänge, bezogen auf die Einheit der Dosisleistung. In Abb. 5 sind hiernach die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial I_a}{\partial D'} \right)_{\text{NaJ-Tl}}$, $\left(\frac{\partial I_a}{\partial D'} \right)_{\text{Stilben}}$ und $\left(\frac{\partial I_a}{\partial D'} \right)_{\text{Natriumsalicylat}}$ als Funktion von λ_{eff} aufgetragen. Man erkennt die äußerst geringe Abhängigkeit von $\left(\frac{\partial I_a}{\partial D'} \right)_{\text{Natriumsalicylat}}$ von der Wellenlänge im Gegensatz zu den entsprechenden Größen für Stilben und besonders für NaJ-Tl. Polykristallines Natriumsalicylat, das schon von BREITLING und GLOCKER [12] für Dosisleistungsmessung bei ultraharter Röntgenstrahlung empfohlen wird, ist also auch im Bereich der weichen und mittelharten Strahlungen ein brauchbares luftäquivalentes Szintillationsmaterial, bei dem Proportionalität zwischen Ausgangsstrom und Dosisleistung weitgehend unabhängig von der Wellenlänge besteht. Arbeitet man insbesondere im Bereich zwischen 40 und 95 kV mit einer nur durch das Röhrenfenster gefilterten Strahlung ohne Zusatzfilter, so ist eine Wellenlängenabhängigkeit der Natriumsalicylat-Fluoreszenz (bezogen auf r/min) fast nicht mehr feststellbar. Die Geraden der Abb. 4 fallen dann annähernd zusammen.

An anderen organischen Leuchtstoffen zeigten BREITLING und GLOCKER [13], [14], daß deren Fluoreszenzintensität bei Röntgenlichterregung dem Grundgesetz über die physikalische Wirkung der Röntgenstrahlung [15], [16] gehorcht. Die Gültigkeit dieses Gesetzes konnte in dem hier besonders untersuchten Bereich von 0,7 bis 0,2 Å für Natriumsalicylat vollauf bestätigt werden. Die unter Kenntnis der Schwächungs- und Streukoeffizienten für Na, O, C und H nach dem Grundgesetz errechnete Wellenlängenabhängigkeit seiner Fluoreszenz deckte sich völlig mit den experimentell gefundenen Werten.

Abb. 5 lehrt im übrigen noch sehr anschaulich, daß beim NaJ-Tl der SEV-Ausgangsstrom I_a der Röntgenstrahlenintensität $j \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}} \right)$ proportional ist. Die zusätzlich eingezeichnete gestrichelte Kurve stellt nämlich den Quotienten:

$$\text{const} \cdot \frac{j}{D'_0}$$

mit fester Dosisleistung D'_0 nach tabellarischen Zusammenstellungen [17] dar. Wie man erkennt, schmiegt sich diese Kurve derjenigen für $\left(\frac{\partial I_a}{\partial D'} \right)_{\text{NaJ-Tl}}$ weitgehend an, so daß man offenbar setzen kann:

$$\left(\frac{\partial I_a}{\partial D'} \right)_{\text{NaJ-Tl}} = \text{const} \cdot \frac{j}{D'_0},$$

woraus sich sofort über:

$$I_a = \text{const} \cdot \int_0^{D'_0} \frac{j}{D'_0} dD'$$

$$I_a = \text{const} \cdot j$$

ergibt, eine Aussage, die das von WEST, MEYERHOF und HORSTADTER [18] gefundene Ergebnis über die beim NaJ-Tl gültige Proportionalität zwischen der Röntgenquantenenergie und der am SEV Ausgang erhaltenen Impulshöhe auf anderem Wege bestätigt.

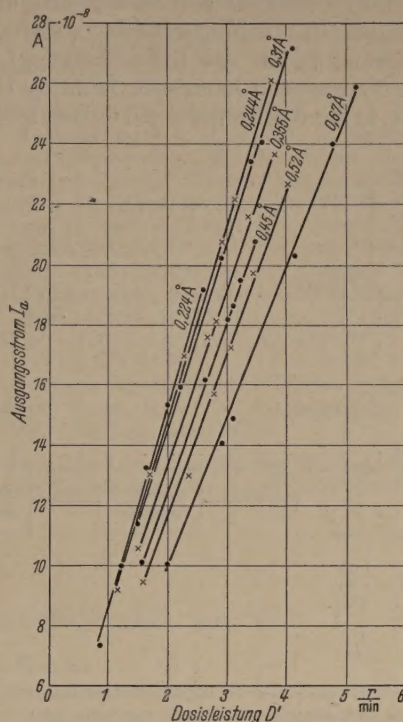


Abb. 4. Beziehung zwischen Ausgangsstrom und Dosisleistung bei verschiedenen Wellenlängen für Natriumsalicylat.

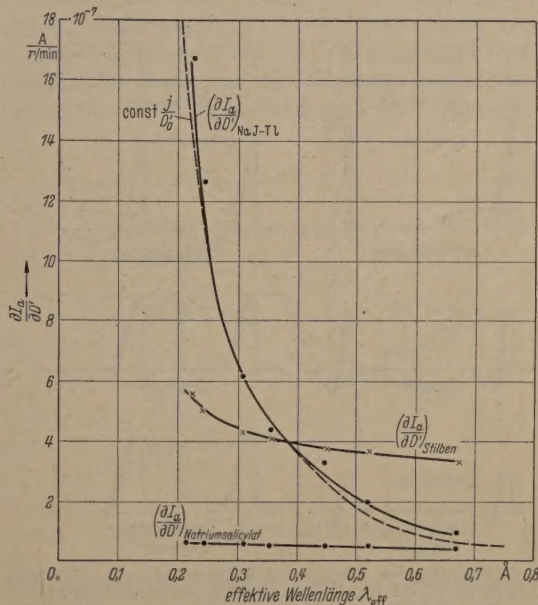


Abb. 5. Zur Wellenlängenabhängigkeit von NaJ-Tl, Stilben und Natriumsalicylat.

IV. Beispiele für Impulsmessung.

An der Impulsanlage mit Steuerventil (vgl. I,a) wurden nach dem aus Abb. 6 ersichtlichen Schalt-schema die Oszillogramme des Verlaufes von Röhrenstrom, Röhrenspannung, Röntgenstrahlenintensität und Dosisleistung aufgenommen. Für die Intensitätsmessung wurde der NaJ-Tl-Kristall, für die Dosisleistungsmessung der Natriumsalicylat-Leuchtschirm benutzt.

Abb. 7 zeigt zwei Beispiele für die Frequenzen $n = 13 \text{ sec}^{-1}$ und $n = 570 \text{ sec}^{-1}$, wobei die mit der Kugelfunkstrecke gemessene Impulsspannungsspitze sich zu 70 bzw. 40 kV ergab. Die niedrigere Spitzenspannung bei der höheren Frequenz ist durch die Kapazität C_L des zwischen Steuerventil und Röntgenrohr liegenden Leitungssystems (besonders des Heiztransformators für die Röhrenheizung) bedingt. Bei hohen Frequenzen kann sich nämlich C_L in der kurzen Zeit, in der das Steuerventil öffnet, trotz dessen

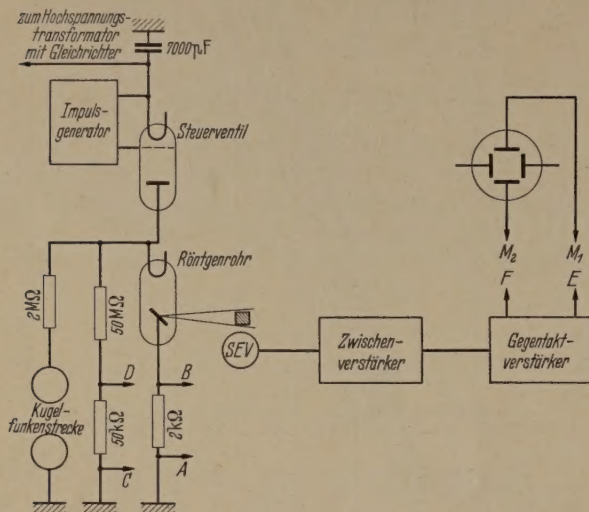


Abb. 6. Zu den Oszillogrammen an der Impuls-Röntgenanlage mit Steuerventil

Die Meßplatten M_1 und M_2 sind verbunden mit:

A B für das Oszillogramm des Röhrenstromes,
C D " " " der Röhrenspannung,
E F " " " der Röntgenstrahlung.

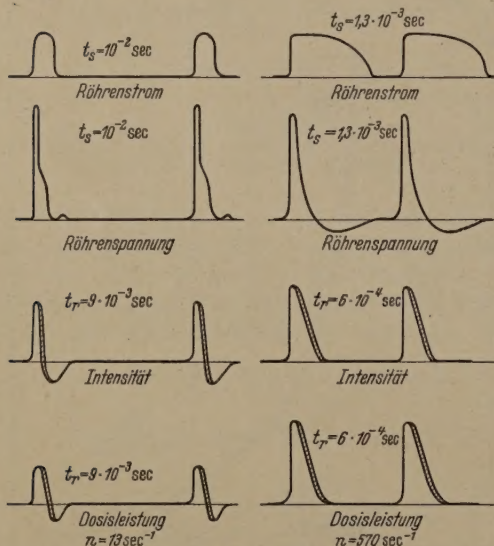


Abb. 7. Oszillogramm von Röhrenstrom, Röhrenspannung und Röntgenstrahlung bei der Impuls-Röntgenanlage mit Steuerventil.

Emissionsstrom von 1,7 Amp nicht über 40 bis 50 kV aufladen. Die Dauer des Impulses ist dann im wesentlichen durch die Entladung von C_L über das Röntgenrohr gegeben. Ein Vergleich zwischen den Strom- und Spannungsozillogrammen zeigt, daß fast während der ganzen Impulsdauer durch das Röntgenrohr Emissions-sättigungsstrom fließt. Erst am Impulsende fällt der Röhrenstrom mit der Spannung merklich ab.

Da der Emissionsstrom im Impuls praktisch konstant bleibt, folgen Röntgenstrahlenintensität und Dosisleistung weitgehend dem Verlauf der Röhren-

spannung. Fällt die Spannung am Impulsende ab, so nimmt die Absorption der Röntgenstrahlung im Röhrenfenster schließlich soweit zu, daß die Intensität der noch austretenden Strahlung unter der Nachweisgrenze liegt. Dies bedingt, daß die Röntgenstrahlenimpulsdauer t_r kleiner als die Spannungs- und Stromimpulsdauer t_s ist. Dieser Effekt ist umso ausgeprägter, je geringer die Impulsspannungsspitze ist. In den Beispielen der Abb. 7 ergab sich bei:

$n = 13 \text{ sec}^{-1}$ (Spitzenspannung 70 kV)

$$t_r = 9 \cdot 10^{-3} \text{ sec},$$

$$t_s = 10^{-2} \text{ sec},$$

sowie bei:

$n = 570 \text{ sec}^{-1}$ (Spitzenspannung 40 kV)

$$t_r = 6 \cdot 10^{-4} \text{ sec},$$

$$t_s = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ sec}.$$

Der mittlere SEV-Ausgangsstrom betrug $4,5 \cdot 10^{-7}$ Amp, was einer mittleren Dosisleistung von etwa 5 r/min, oder einer Dosis von $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ r}$ je Impuls (bei $n = 570 \text{ sec}^{-1}$) am Ort des Kristalls entsprach.

Bei der unter I, b genannten Impulsanlage, die nach dem Prinzip des BRAUNschen Rohres arbeitet, ist die Röhrenspannung konstant. Die Messungen beschränkten sich deshalb darauf, den Verlauf der Dosisleistung (und damit den Verlauf der Intensität) zu oszillographieren, was infolge der Konstanz der Strahlenqualität während des Impulses mit jedem der untersuchten Leuchtstoffe möglich ist. Wegen seiner kurzen Abklingzeit wurde Stilben gewählt.

Die in Abb. 8 wiedergegebenen Oszillogramme der Dosisleistung zeigen die gute Rechteckform der hier erhaltenen Impulse im Frequenzbereich $10^3 \leq n \leq 10^5 \text{ sec}^{-1}$ entsprechend einer Röntgenimpulsdauer zwischen $2,5 \cdot 10^{-4} \geq t_r \geq 5 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$. Dabei ist zu bedenken, daß bei $5 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$ eine Impulsverbreiterung infolge der beschränkten Bandbreite der Verstärker schon deutlich merkbar wird. Bei diesen kurzen Impulsen sind auf dem Oszillographenschirm deutlich die von den Einzelszintillationen herrührenden Stöße zu erkennen, aus denen sich der Meßimpuls zusammensetzt. Dies ist in Abb. 8 durch die breite Schraffierung innerhalb der Impulsumrandung angedeutet.

Der mittlere SEV-Ausgangsstrom von $2 \cdot 10^{-7}$ Amp entsprach hier einer mittleren Dosisleistung von 0,2 r/min oder einer Impulsdosis von rund $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ r}$ (bei $n = 10^5 \text{ sec}^{-1}$) am Ort des Kristalls.

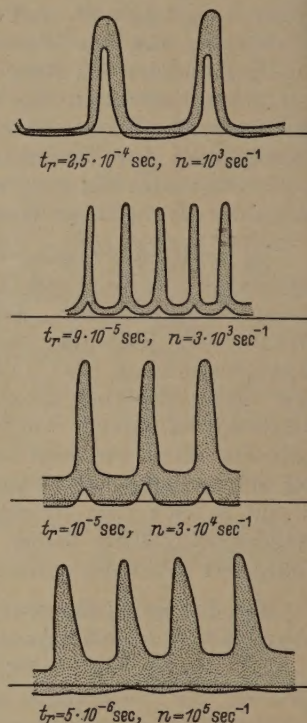


Abb. 8. Oszillogramm der Dosisleistung bei der Impuls-Röntgenanlage mit konstanter Röhrenspannung.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für ihre Unterstützung dieser Arbeit durch die Bewilligung von Mitteln und Geräten zu großem Dank verpflichtet.

[illegible]

Koordinatensystems sind aus Abb. 1 zu ersehen. \mathbf{l} , \mathbf{n} und \mathbf{r} sind die Vektoren, welche die Lage von Röntgenstrahl, Kristallinormaler und reflektiertem Strahl gegeneinander wiedergeben; sie sind als Einheitsvektoren gewählt. Der Zusammenhang zwischen dem BRAGG-Winkel ϑ ($=\vartheta_0$ für den Drehwinkel $\tau=0$) und \mathbf{n} (mit den Komponenten n_1^0, n_2^0, n_3^0 für $\tau=0$), \mathbf{l} und τ ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\sin \vartheta = (n_1^0 l_1 + n_2^0 l_2) \cos \tau + (n_1^0 l_2 - n_2^0 l_1) \sin \tau + n_3^0 l_3.$$

Nach einigen einfachen Rechnungen ergeben sich die Koordinaten des Punktes R (Durchstoßpunkt des Reflexstrahles durch die Filmebene) nach der Drehung um den Winkel τ zu:

$$\left. \begin{aligned} x &= b \cos \tau + v r_1 \\ y &= b \sin \tau + v r_2 \\ z &= v r_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei

$$\begin{aligned} r_1 &= -l_1 + 2 \left[(n_1^{02} l_1 + n_1^0 n_2^0 l_2) \cos^2 \tau \right. \\ &\quad + (n_1^{02} l_2 - 2 n_1^0 n_2^0 l_1 - n_2^{02} l_2) \sin \tau \cos \tau \\ &\quad + (n_2^{02} l_1 - n_0^0 n_2^0 l_2) \sin^2 \tau \\ &\quad + n_1^0 n_3^0 l_3 \cos \tau \\ &\quad \left. - n_2^0 n_3^0 l_3 \sin \tau \right] \\ r_2 &= -l_2 + 2 \left[(n_2^{02} l_2 + n_1^0 n_2^0 l_1) \cos^2 \tau \right. \\ &\quad + (n_1^{02} l_1 + 2 n_1^0 n_2^0 l_2 - n_2^{02} l_1) \sin \tau \cos \tau \\ &\quad + (n_1^{02} l_2 - n_1^0 n_2^0 l_1) \sin^2 \tau \\ &\quad + n_1^0 n_3^0 l_3 \sin \tau \\ &\quad \left. + n_2^0 n_3^0 l_3 \cos \tau \right] \\ r_3 &= -l_3 + 2 \left[(n_1^0 n_3^0 l_1 + n_2^0 n_3^0 l_2) \cos \tau \right. \\ &\quad \left. + (n_1^0 n_3^0 l_2 - n_2^0 n_3^0 l_1) \sin \tau + n_3^0 l_3 \right] \end{aligned}$$

und

$$v = \frac{f + l_1 b - l_1 b \cos \tau - l_2 b \sin \tau}{2 [(n_1^0 l_1 + n_2^0 l_2) \cos \tau + (n_1^0 l_2 - n_2^0 l_1) \sin \tau + n_3^0 l_3] - 1}$$

ist.

Um die Form der durch die Drehung entstandenen Kurven leichter diskutieren zu können, sollen die Koordinaten in ein Koordinatensystem in der Filmebene transformiert werden. Dazu sind zwei Drehungen erforderlich: Zunächst sei eine Drehung um die z -Achse um den Winkel α durchgeführt, so daß die Filmebene parallel zur neuen y -(\bar{y})-Achse liegt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ \bar{y} &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ \bar{z} &= z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei α der Winkel zwischen der Projektion von \mathbf{l} auf die x - y -Ebene und der x -Achse ist. Der zweite Schritt ist eine Drehung der x - z -Ebene um die \bar{y} -Achse um den Winkel φ , so daß die Filmebene parallel zur ursprünglichen x - y -Ebene liegt, wobei φ der Winkel zwischen der Rotations-(z -)Achse und dem einfallenden Röntgenstrahl, d. h. $\cos \varphi = l_3$ ist.

Nach dieser Umformung lauten die Koordinaten der Punkte R im Koordinatensystem $\xi, \eta, (\zeta=0)$ der Filmebene:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{l_3} \bar{x} \\ \eta &= \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Abb. 4. Rückstrahlaufnahme auf stehendem ebenen Film einer nicht bewegten Probe aus Zink-Kupfer-Ferrit.

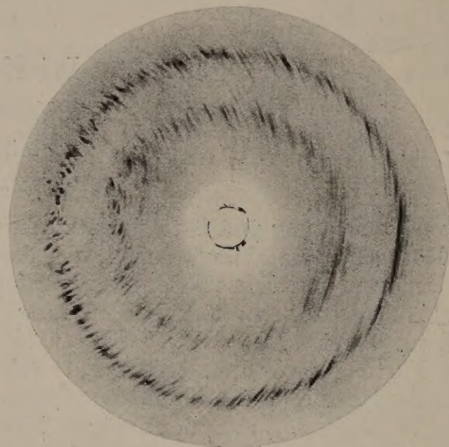


Abb. 5. Rückstrahlaufnahme auf stehendem ebenen Film einer rotierenden Probe aus Zink-Kupfer-Ferrit in Anordnung gemäß Abb. 2.

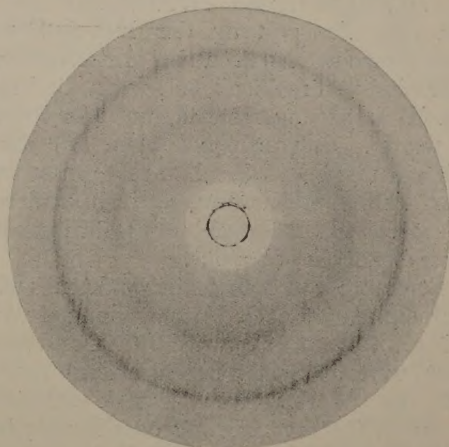


Abb. 6. Rückstrahlaufnahme auf stehendem ebenen Film einer rotierenden Probe aus Zink-Kupfer-Ferrit in Anordnung gemäß Abb. 3.

Da sich die allgemeine Kurvenform nach den angegebenen Gleichungen nicht einfach diskutieren läßt, sollen im folgenden zwei experimentell wichtige Spezialfälle betrachtet werden. Der Spezialfall 1 wird durch Bild 2 veranschaulicht. Analytisch ist dieser

Spezialfall durch folgende Beziehungen charakterisiert:

$$l_1 = l_2 = 0; \quad l_3 = 1.$$

Das Ergebnis der Durchrechnung unter Berücksichtigung dieser Ausgangsbedingungen stellt Kreise um den Punkt S dar von der Gleichung:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \xi^2 + \eta^2 = (n_1^{02} + n_2^{02}) \frac{4 n_3^{02} f^2}{(2 n_3^{02} - 1)^2} \\ &+ 2 n_1^0 \frac{2 n_3^0 f b}{2 n_3^{02} - 1} + b^2 = f^2 \operatorname{tg}^2 2 (90 - \vartheta_0) \\ &+ \frac{2 n_1^0}{\cos \vartheta_0} f b \operatorname{tg} 2 (90 - \vartheta_0) + b^2 = R^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $r = f \operatorname{tg} 2 (90 - \vartheta_0)$ den Radius des DEBYE-SCHERRER-Kreises so erhält man:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 + 2 \frac{n_1^0}{\cos \vartheta_0} \cdot b \cdot r + b^2.$$

In Abb. 2 ist das Ergebnis dargestellt.

Der zweite Spezialfall ist durch folgende Ausgangsbedingungen gekennzeichnet:

$$l_2 = 0; \quad l_1 = l_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2}; \quad b = 0$$

und entspricht dem experimentellen Fall der Einstrahlung unter 45° zur Werkstoffoberfläche (Abb. 3). Das Ergebnis der Durchrechnung dieses Spezialfalles läßt nicht so ohne weiteres die Kurvenform erkennen, weshalb der Weg eingeschlagen wurde, die Kurve punktweise zu ermitteln (Abb. 3). Näherungsweise kann man die Kurvenform berechnen, wenn man τ und n_2^0 als kleine Größen betrachtet und erhält für ξ und η :

$$\begin{aligned} \xi &\approx \frac{n_1^0 (n_1^0 + n_3^0) - \frac{1}{2}}{n_1^0 n_3^0} \cdot f = \frac{1 - 2 \sqrt{2} n_1^0 \sin \vartheta_0}{\cos 2 \vartheta_0} \cdot f \\ \eta &\approx \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{(n_1^0 \tau + n_2^0) (n_1^0 + n_3^0)}{n_1^0 n_3^0} \cdot f = -2 \cdot \frac{(n_1^0 \tau + n_2^0) \sin \vartheta_0}{\cos 2 \vartheta_0} \cdot f. \end{aligned}$$

Über die Herstellung von lichtempfindlichen Cadmiumsulfidschichten durch Kathodenzerstäubung.

VON GERHARD HELWIG UND HANS KÖNIG.

Mit 1 Textabbildung.

(Eingegangen am 27. Dezember 1954.)

Die bekannte Eigenschaft des Cadmiumsulfids, bei Belichtung seinen Widerstand um Größenordnungen zu verringern [1], führte bald nach ihrer Entdeckung zur Herstellung empfindlicher Photowiderstände, die zwar wegen ihrer geringen Konstanz nicht für Präzisions-, jedoch gut für überschlägige Messungen und Steuerzwecke verwendbar sind. Um möglichst große CdS-Einkristalle zu erhalten, läßt FRERICH [2] bei ca. 800°C Cadmiumdampf mit Schwefelwasserstoff reagieren; dabei sublimiert CdS an den kühleren Stellen des Reaktionsrohres in Form von Nadeln, Bändern oder Kristallblättchen aus. Das anfallende Material variiert stark in seinen lichtelektrischen Eigenschaften, daher müssen Kristalle mit erwünschten Eigenschaften herausgesucht werden. Die so gewonnenen Kristalle können zwar eine Fläche von einigen Quadratzentimetern [13] erreichen, doch sind ihre Dicke und damit ihr Rauschen vorgegeben, d. h. den zufälligen Wachstumsbedingungen unter-

worfen. Das Bestreben, großflächige CdS-Photowiderstände mit geringer Dicke herzustellen, führte zu polykristallinen CdS-Schichten¹, wie man sie durch Aufdampfen im Hochvakuum erhalten kann [4]. Solche Aufdampfschichten haben gegenüber den Einkristallen den großen Vorteil, daß ihre Schichtdicke nach Wunsch einzustellen ist, wodurch man das Rauschen der Schicht beherrschen kann.

Sowohl Cadmiumsulfideinkristalle als auch polykristalline Cadmiumsulfidschichten lassen sich in ihrer lichtelektrischen Empfindlichkeit weiter verbessern durch Einbau von Aktivatoren wie Kupfer und Silber, deren wesentlicher Vorteil neben einer Verschiebung der Empfindlichkeit nach langen Wellen die Verstär-

Zusammenfassung.
Es werden die Kurvenformen der Streifen, die bei Rotation der Probe auf Rückstrahlaufnahmen auf stehendem, ebenen Film bei BRAGG-Winkel um 85° zu beobachten sind, für beliebige Lage von Werkstoffoberfläche und Film berechnet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

Literatur. [1] HENDUS, H. und H. NOWOTNY: Naturw. **35**, 61 (1948). — [2] FRERICH, G.: Z. Naturforsch. **6a**, 319 (1951). — [3] GAY, P. und A. KELLY: Acta Cryst. **7**, 333 (1951). — [4] BRAGG, W. L. und H. LIPSON: Nature (London) **141** 367 (1938).

Dozent Dr. VIKTOR HAUKE und Dr. JOHANNA HAUKE
Institut für Werkstoffkunde der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen.

¹ FRERICH [2] und WARMINSKY [3] weisen bereits auf ausgedehnte CdS-Schichten mit großer photoelektrischer Empfindlichkeit hin. Während der Korrektur erschien eine Arbeit von W. VEITH [15] über die lichtelektrischen Eigenschaften von aufgedampften Cadmiumsulfidschichten.

für handelsübliche Einkristallzellen bis vor kurzem noch zu 10^2 bis 10^3 angegeben wurde, haben neuere Zellen der RCA oder der Clairex Corp. bereits bei ca. 12 Lux I/I_0 -Werte von 10^3 . GOERCKE [14] erreicht für aktivierte CdS-Aufdampfschichten für 1000 Lux I/I_0 -Werte von 10^8 bis 10^{10} . An durch Kathodenzerstäubung entstandenen „nicht aktivierten“ Schichten konnten wir bei 1000 Lux Beleuchtungsstärke (bei einem Dunkelstrom von $0,06 \mu\text{A}$) eine Abnahme des Widerstands um 4 bis 5 Zehnerpotenzen beobachten. Eine Überlastung der Widerstände führte zu einer bleibenden Erhöhung des Dunkelstromes. Durch Flüssigkeitskühlung z. B. in Benzol ließ sich die Belastungsgrenze etwas erhöhen. Überlastete Schichten konnten durch erneutes, kurzzeitiges Tempern auf etwa 600°C ihre ursprünglichen Werte wieder erhalten. Große Spaltlängen ergeben hohe Photostrome; so zeigten Schichtwiderstände auf $2,5 \times 5 \text{ cm}$ großen Glasplatten mit Kammelektroden einen Dunkelstrom von $1\text{--}2 \mu\text{A}$ und einen Hellstrom (bei 1000 Lux) von $10\text{--}20 \text{ mA}$. Mit diesen Strömen konnten bequem gewöhnliche Gesprächszählwerke normaler Empfindlichkeit ohne Zwischenschaltung eines Relais gesteuert werden.

Es ist zu erwarten, daß sich die lichtelektrische Empfindlichkeit der hier beschriebenen Cadmiumsulfidschichten durch Einbau von Aktivatoren weiter

steigern läßt, entweder durch nachträgliche Temperaturbehandlung nach dem Verfahren von GOERCKE [12] oder durch Zusätze zum Kathodenmetall oder zum Zerstäubungsgas. Versuche in dieser Richtung sind in Vorbereitung.

Zusammenfassung.

Zur Herstellung lichtempfindlicher Cadmiumsulfidschichten wird Cadmium als Kathode in Schwefelwasserstoff-Edelgasmischungen zerstäubt. Die so erzeugten Cadmiumsulfidzellen werden mit auf andere Weise entstandenen verglichen.

Literatur. [1] Siehe B. GUDDEN: Die lichtelektrischen Erscheinungen, Berlin 1928. — [2] FRERICHS, R.: *Naturw.* **33**, 281 (1946). — [3] FRERICHS, R. und R. WARMINSKY: *Naturw.* **33**, 251 (1946). — [4] WEISS, K.: *Z. Naturforsch.* **2a**, 650 (1947); *DBP* Nr. 837 424 vom 20. 3. 1952. — [5] GOERCKE, P.: *Ann. des Télécommunications* **6**, 325 (1951). — [6] HAMMER, K.: *Optik* **3**, 495 (1948). — [7] HIESINGER L. und H. KÖNIG: *Heraeus-Festzeitschrift* 1951, S. 376. — [8] HELWIG, G.: *Z. Physik* **132**, 621 (1952). — [9] GRUBITSCH, H.: *Anorg. präp. Chemie*, 1950, S. 281. — [10] ROSE, A., P. K. WEIMER und S. V. FORGUE: *Phys. Rev.* **76**, 179 (1949). — [11] KRAUTZ, E.: *DBP* 868 481, vom 26. 2. 1953. — [12] GOERCKE, P.: *DBP* 919 727. — [13] BISHOP, M. E. und S. H. LIEBSON: *Journ. appl. Phys.* **24**, 660 (1953). — [14] GOERCKE, P.: bisher unveröffentlicht. — [15] VEITH W.; *Z. angew. Phys.* **7**, 1 (1955).

Dr. GERHARD HELWIG und Prof. Dr. HANS KÖNIG,
Physikalisches Institut der TH Darmstadt.

Ein schnellregistrierendes Absorptionsspektralphotometer.*

Von G. THEWS und D. LÜBBERS.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 28. Dezember 1954.)

In den letzten Jahren hat die Frage nach der Sauerstoffversorgung des tierischen Gewebes für die physiologische Forschung ständig an Bedeutung gewonnen. Der günstige Umstand, daß in der Zelle selbst Farbstoffe [2], [14] vorhanden sind, die bei der Sauerstoffanlagerung ihr Absorptionsspektrum verändern [11], gestattet bei solchen Untersuchungen die direkte Anwendung spektroskopischer Methoden. Die relativ große Geschwindigkeit der maßgebenden Diffusionsprozesse [8], [12], [15] und der chemischen Reaktionen, die meist durch *gleichzeitige* Veränderung mehrerer Farbstoffe gekennzeichnet sind, stellen an die Untersuchungsmethodik besonders hohe Anforderungen. Da die Deutung der am lebenden Gewebe gewonnenen Spektren schwierig ist, versucht man, verschiedene Fragen in Modellversuchen unter definierten Bedingungen zu klären. Schon für solche Untersuchungen muß ein Absorptionsspektralphotometer ungefähr folgende Forderungen erfüllen:

1. Der Meßbereich soll das nahe ultrarote, das sichtbare und das ultraviolette Spektrum umfassen.

2. Das Wellenlängenauflösungsvermögen muß so groß sein, daß sich im Sichtbaren Spektralbereiche mit einem Wellenlängenabstand von $1 \text{ m}\mu$ trennen lassen.

3. Bei 20 Meßpunkten pro sec soll ein Spektralbereich von $300 \text{ m}\mu$ in etwa 0,5 bis 1 min registriert werden.

4. Der Meßfehler soll bei dieser Meßgeschwindigkeit kleiner als 1% sein.

Für die Absorptionsspektralphotometrie sind eine Reihe von verschiedenen Meßverfahren bekannt. Um die Möglichkeiten zur Realisierung der aufgestellten Forderungen zu prüfen, soll in Anlehnung an die Arbeit von KROEBEL [9] eine kurze Diskussion der wichtigsten Meßprinzipien vorausgeschickt werden.

Subjektive Methoden scheiden von vornherein aus, da sie in jedem Fall eine große Meßzeit benötigen und daher nicht der Forderung nach hoher zeitlicher Auflösung genügen. Es bleiben daher nur die Methoden der *objektiven Spektralphotometrie* zu diskutieren. Diese Meßverfahren enthalten als Bauelemente:

α) die Lichtquelle (L); β) die Filteranordnung (F) (Glasfilter, Flüssigkeitsfilter, Monochromatoren); γ) die Meßküvette (K); δ) den Empfänger (E) (Photzellen, Photoelemente, Photowiderstände, Sekundärelektronen-Vervielfacher); ϵ) die Registrieranordnung (M) (Meßinstrument, evtl. mit einer Verstärkeranordnung).

Als Hauptfehlermöglichkeiten kommen bei der objektiven Spektralphotometrie in Betracht: 1. Schwankung der Lichtintensität; 2. mangelnde Monochromasie (Nichterfüllung der Voraussetzung des LAMBERT-BEER'schen Gesetzes); 3a. mangelnde Proportionalität zwischen Beleuchtungsstärke und Photostrom (besonders bei Verwendung von Photoelementen);

* S. a. Kieler Dissertation Thews (1954).

3b. unterschiedliche spektrale Lichtempfindlichkeit der einzelnen Photozellen (bei Mehrzellenmethoden); 4. zeitliche Veränderung des Photostromes (Temperatureinfluß, Alterungserscheinungen); 5. Meßfehler der Registriereinrichtung.

Es kommen in Frage:

1. Einstrahlmethoden.

a) Die Ausschlagsmethode zeichnet sich durch einen besonders einfachen Aufbau aus (Abb. 1a). Zunächst wird die Küvette mit dem Lösungsmittel (K_1) in den Strahlengang gebracht, dann die Küvette mit der Lösung (K_2). Die Meßinstrumentausschläge sind den Lichtintensitäten proportional. In die Messungen können alle aufgezählten Fehler eingehen.

b) Die Einstrahl-Kompensationsmethode (Abb. 1b) stellt eine Variation der Ausschlagsmethode dar. Mit K_1 im Strahlengang wird der Photostrom

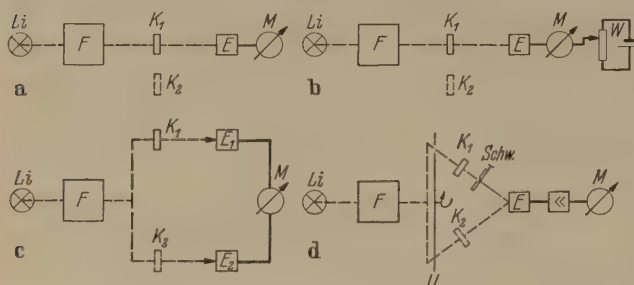


Abb. 1. Prinzipdarstellung spektrophotographischer Methoden. a) Einstrahl-Einzellenanordnung als Ausschlagsmethode; b) Einstrahl-Einzellenanordnung als Kompensationsmethode; c) Zweistrahl-Zweizellenanordnung als Substitutionsmethode; d) Zweistrahl-Einzellenanordnung als Wechsellichtmethode. E_1, E_2 = Empfänger (z. B. Photozelle); F = Filter; K_1, K_2 = Küvetten; Li = Lichtquelle; $Schw$ = Vorrichtung zur Lichtschwächung; U = Unterbrecherscheibe; W = Kompensationswiderstand.

kompensiert. Dann wird K_2 eingesetzt und der Ausschlag gemessen, oder M dient als Nullinstrument, wobei die Widerstandsveränderung in der Brücke als Maß für die Veränderung der Beleuchtungsstärke dient. Mit Hilfe dieser Methode kann der unter 5. angeführte Fehler verkleinert werden.

2. Zweistrahlmethoden.

Um den bei den Einstrahlmethoden nicht zu unterdrückenden Fehler, der durch die Schwankungen der Lichtintensität hervorgerufen wird, auszuschalten, geht man zu Zweistrahlmethoden über.

a) Kompensations- und Substitutionsmethoden (Abb. 1c). Der Lichtstrahl wird geteilt und jeder Anteil auf einen Empfänger geleitet. In einem Teilstrahl steht die Küvette mit dem Lösungsmittel (K_1), in dem anderen die Küvette mit der Lösung (K_2). Das Instrument dient zur Nullanzeige. Die Absorptionsbestimmung kann über die meßbare Veränderung der Photozellenspannung bis zur Kompensation der Photostrome erfolgen. Bei den sog. Substitutionsmethoden wird eine meßbare und eichbare Lichtschwächung (Graukeil, Blende) im Vergleichsstrahlengang benutzt, um am Meßinstrument den Wert Null einzustellen. Dabei wird immer auf die gleiche Beleuchtungsstärke eingestellt, so daß mangelnde Proportionalität zwischen Beleuchtungsstärke und Photostrom keine Rolle spielt.

b) Wechsellichtmethoden. (Abb. 1d). Bei diesem Verfahren werden beide Lichtstrahlen nacheinander von einer rotierenden Sektorenscheibe unter-

brochen. Sind die beiden auf denselben Empfänger gelangenden Lichtstrahlen in ihren Intensitäten verschieden, dann entsteht hier ein Wechselstrom, der verstärkt und vom Meßinstrument angezeigt wird. Eine meßbare Lichtschwächung ermöglicht, das Verfahren zu einer Null-Methode auszubauen. Der Vorteil der Wechsellichtmethoden liegt darin, daß neben der Unabhängigkeit von Intensitätsschwankungen und Proportionalitätsfehlern nur ein Empfänger benutzt wird.

Neben den aufgezählten Methoden haben noch eine Reihe davon abgeleiteter Prinzipien Anwendung gefunden, wobei je nach der Fragestellung auf die Erzielung bestimmter Eigenschaften Wert gelegt wurde [1], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [13], [16].

Für die Auswahl des Meßverfahrens war vor allem die Forderung nach hoher zeitlicher Auflösung zu beachten. Wenn für die Aufnahme eines Meßpunktes die Zeit von 1/20 sec zur Verfügung steht, dann scheiden bei den objektiven Methoden die an sich sehr genauen Substitutionsmethoden aus, da hierbei stets mechanische Teile bewegt werden müssen. Es bleibt also nur die Ausschlagsmethode, die eine schnelle Messung gestattet. Aufgabe bei der Entwicklung eines Gerätes nach der Ausschlagsmethode mußte es also sein, die oben genannten Fehlerquellen so weit wie möglich zu beseitigen. Von den Schwankungen der Lichtintensität (Fehler 1) werden wir weitgehend unabhängig, wenn wir eine Zweistrahlmethode verwenden. Mangelnde Monochromasie (Fehler 2) wird durch die Verwendung eines Doppelmonochromators vermieden. Bei einer hohen Auflösung steht allerdings für die Messung nur eine verhältnismäßig geringe Lichtintensität zur Verfügung, so daß an die Empfindlichkeit des Empfängers hohe Ansprüche gestellt werden müssen. Um eine möglichst gute Proportionalität zwischen Beleuchtungsstärke und Photostrom sicherzustellen (Fehler 3a), ist die Verwendung einer Vakuumzelle angezeigt. Wegen der oben geforderten großen Empfindlichkeit (günstiges Verhältnis von Signalspannung zu Störspannung) ist es zweckmäßig, einen Sekundärelektronen — Vervielfacher zu verwenden. Wird bei einer Zweistrahlmethode jede der beiden Intensitäten mit einer besonderen Zelle gemessen, dann tritt die Schwierigkeit auf, daß niemals zwei Zellen gefunden werden können, die in ihren Charakteristiken vollkommen übereinstimmen (Fehler 3b). Es mußte also die gleichzeitige Messung beider Strahlenintensitäten über eine Zelle (Zweistrahl-Einzellen-Methode) angestrebt werden. Die durch Alterung und Temperaturschwankungen (Fehler 4) hervorgerufenen Störungen können bei kurzen Meßzeiten meist vernachlässigt werden.

Auf Grund dieser Forderungen entwickelten wir das im folgenden beschriebene schnellregistrierende Absorptions-Spektralphotometer.

3. Aufbau des Photometers.

Prinzip: Das Licht wird nach Durchsetzen eines Monochromators in zwei Strahlen geteilt; der eine geht als Meßstrahl durch das Untersuchungsobjekt (Meßwert), der andere wird als Vergleichsstrahl (Vergleichswert) benutzt. Beide fallen auf dieselbe Photokathode. Die Messung beider Lichtanteile gelingt durch Modulation der Lichtstrahlen mit zwei verschiedenen Frequenzen (Unterbrecherscheibe) und anschließende

rennung durch zwei Resonanzverstärker. Um die Empfindlichkeit der Verstärker in Bereichen unterschiedlicher Empfindlichkeit des Sekundärelektronen-Vervielfachers ausnutzen zu können, wurde eine automatische Empfindlichkeitsumschaltung eingebaut. Hierbei schaltet ein Verstärker mit großem Aussteuerbereich ein Relaissystem, das die Eingangsempfindlichkeit am Eingangswiderstand des Meßverstärkers stufenweise verändert. Die gleichzeitige Messung zw. Aufzeichnung von Meßwert und Vergleichswert ermöglicht es, bei einer Ausschlagsmethode die geforderte Genauigkeit (besser als 1%) zu erreichen. (Ausschlagsmethode mit kontrolliertem Nullpunkt.)

Bei der Beschreibung der Meßanordnung wird zuerst der dreigliedrige optische Teil (a) Lichtquelle, b) Monochromator, c) Photometerzusatz) und dann die ebenfalls dreigliedrige elektrische Anordnung (a) Meßverstärker, b) automatische Empfindlichkeitsumschaltung, c) Registriereinrichtung und mechanischer Aufbau) beschrieben.

4. Optische Anordnung.

(Abb. 2.)

a) Lichtquelle (Li). Als Lichtquelle für das sichtbare und nahe ultrarote Spektralgebiet wird eine Wolframbandlampe (Philips 6002 E 100 Watt) verwendet, die aus einem Akkumulator mit einer Spannung von 6 Volt gespeist werden kann. Ihre Intensität und spektrale Verteilung hat sich für die speziell geplanten Untersuchungen als ausreichend erwiesen. Eine zusätzliche Stabilisierung der Lichtquelle ist nicht nötig, da bei Anwendung der Zweistrahlmethode die Schwankungen der Intensität im Vergleichsstrahl mitregistriert werden. Das Wolframband ($2 \times 15 \text{ mm}^2$) wird mit einer Spiegeloptik im Verhältnis 1:1 auf den Eintrittsspalt (E_M) des Doppelmonochromators abgebildet.

b) Monochromator. Wir benutzen einen Doppelmonochromator (DM) der Firma Leiss, der mit einer Spiegeloptik ausgerüstet und daher für Messungen im ultraroten, sichtbaren und ultravioletten Spektralbereich geeignet ist. Die Prismen (P_M) aus verschiedenen Materialien (Schwerflint, Quarz oder Steinsalz) lassen sich, dem gewählten Spektralbereich entsprechend, auswechseln. Der Doppelmonochromator besitzt gerade Eintritts- (E_M) und Austrittsspalte (A_M). Das nutzbare Öffnungsverhältnis beträgt 1:7, das kleinste auflösbare Wellenlängenintervall wird mit $2,5 \text{ \AA}$ bei einer Wellenlänge von $500 \text{ m}\mu$ angegeben. Da in diesem Fall jedoch wegen der engen Spaltstellung die Intensität des austretenden Lichtes sehr gering ist, mußten wir für unsere Messungen etwas größere Spaltbreiten wählen.

Die Prismendrehung und damit die Wellenlängeneinstellung im Leiss-Doppelmonochromator erfolgt mittels einer Wellenlängentrommel (W_M) über ein Schneckengetriebe (G_M). Um eine gleichmäßige Änderung der Wellenlängeneinstellung zu gewährleisten,

wurde ein Motor (M_W) über ein Untersetzungsgetriebe mit der Trommel (W_M) gekoppelt. Die Umdrehungsgeschwindigkeit kann durch einen veränderlichen Widerstand geregelt werden, so daß für den Durchlauf eines Spektralbereiches von $300 \text{ m}\mu$ 25 bis 90 sec benötigt werden. Eine automatische Rücksteuerung des Wellenlängenantriebes ermöglicht eine fortlaufende Registrierung. Neben der Wellenlängentrommel sind auf einer Schiene verschieblich zwei Kontakte angebracht, mit denen der gewünschte Spektralbereich eingestellt werden kann. Ein Zapfen, der sich auf einem Schlitten, mit der Wellenlängentrommel gekoppelt, bewegt, schließt beim Anschlag an eine dieser beiden Begrenzungen den Kontakt. Damit wird über zwei Relais der Läufer des Gleichstrommotors umgepolt und der Spektralbereich in entge-

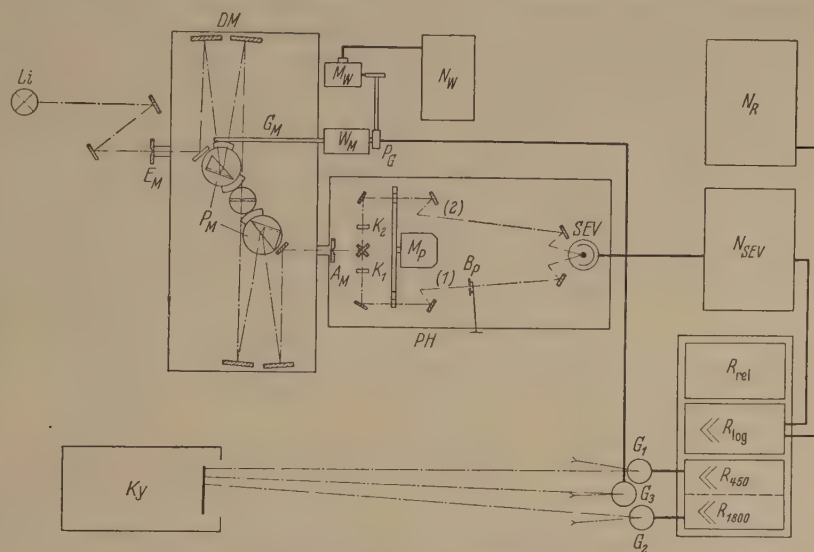


Abb. 2. Gesamtanordnung des schnellregistrierenden Absorptionsspektralphotometers. A_M = Austrittsspalt des DM; B_p = Blende im Vergleichsstrahl; (1) DM = Doppelmonochromator; E_M = Eintrittsspalt von DM; G_1, G_2, G_3 = Galvanometer; G_M = Antriebsvorrichtung für die Prismendrehung. K_y = Kymographion; Li = Lichtquelle; M_p = Antriebsmotor für Sektorenscheibe; M_W = Antriebsmotor für G_M ; N_R = Netzgerät für die Verstärker; N_{SEV} = Netzgerät für den SEV (= Sekundärelektronen-Vervielfacher); N_W = Netzgerät für M_W und Relaissystem zur automatischen Rücksteuerung; PH = Photometerzusatz; P_G = Potentiometer zur Wellenlängenanzeige; P_M = Prismen des DM; R_{450} = Meßverstärker (450 Hz); R_{1800} = Meßverstärker (1800 Hz); R_{log} = Verstärker für den gesamten Aussteuerungsbereich des SEV; R_{rel} = Relaissystem zur automatischen Empfindlichkeitsumschaltung.

gesetzter Richtung durchlaufen. Entsprechend wird an der anderen Begrenzung rückgesteuert.

c) Photometerzusatz. Im Photometerzusatz (PH) sind untergebracht: die Spiegeloptik mit Küvetten und Aperturblende, die Sektorenscheibe zur Lichtmodulation und der Sekundärelektronen-Vervielfacher (SEV) als Empfänger.

Spiegeloptik. Das abbildende System ist aus oberflächenaluminisierten und mit einer Quarzschuttschicht versehenen Spiegeln aufgebaut. Das aus dem Monochromator austretende Licht wird durch zwei übereinanderstehende Spiegel, die um 90° gegeneinander gedreht sind, in zwei Anteile zerlegt. Der eine Strahl wird als Meßstrahl (2) durch die Küvette (K_2) mit Lösung und Lösungsmittel auf die Photokathode geleitet, der andere Strahl (Vergleichsstrahl) (1) erreicht dieselbe Photokathode nach Durchgang durch eine gleichartige Küvette (K_1), die aber nur das Lösungsmittel enthält, und nach Durchgang durch eine verstellbare Aperturblende (B_p). Mit dieser können vor Beginn der Messung beide

Strahlen auf gleiche Intensität abgestimmt werden. Während der Messung wird die Weite der Blende nicht verändert.

Die Spiegeloptik ist für Strahl (1) und Strahl (2) gleich und ist symmetrisch aufgebaut.

Bei Berechnung der Spiegeloptik war eine Reihe von Bedingungen zu erfüllen: 1. Das Öffnungsverhältnis, das durch die Optik des Monochromators mit 1 : 7 vorgegeben ist, ist einzuhalten. 2. Da die Photokathode des verwendeten Vervielfachers eine nutzbare Kathodenoberfläche von nur $5 \times 5 \text{ mm}^2$ hat, ist der 10 mm hohe Austrittsspalt des Monochromators entsprechend verkleinert abzubilden. 3. Die Küvettenstrecken sollen von annähernd parallel begrenzten Strahlenbündeln durchsetzt werden. 4. Die Sektorenscheibe (s. u.), die nicht zu große Ausmaße haben darf, beschränkt die Strahlenhöhe auf 7 mm. 5. Aus fertigungstechnischen Gründen sind möglichst Spiegel mit ganzzahligen Dioptriewerten zu verwenden. Diese Bedingungen konnten dadurch erfüllt werden, daß für jeden der beiden Strahlen zwei abbildende Systeme hintereinandergeschaltet wurden. Die Zwischenabbildung liegt etwa am Ort der Sektorenscheibe. Jedes abbildende System besteht aus einem Abbildungsspiegel und einem Feldspiegel. Der Feldspiegel hat die Aufgabe, den vorhergehenden Abbildungsspiegel auf die nächstfolgenden abzubilden, so daß kein Intensitätsverlust (außer durch die Reflexion) im Strahlengang auftritt. Bei der Berechnung der Feldspiegel mußte gleichzeitig ihre abbildende Funktion mit berücksichtigt werden.

Sektorenscheibe. Die Modulation der beide Lichtstrahlen geschieht mit Hilfe einer rotierenden Sektorenscheibe ($d = 19 \text{ cm}$), die auf einem inneren Kranz 36, auf einem äußeren Kranz 9 Unterbrechersegmente aufweist. Der äußere Kranz unterbricht den Vergleichsstrahlengang (1), der innere den Meßstrahl (2). Die Sektorenscheibe wird von einem Synchronmotor (M_P) (Pabst S 60 D) mit 3000 Umdrehungen pro min angetrieben, so daß die Unterbrecherfrequenzen 450 Hz bzw. 1800 Hz betragen. Die Höhe der gewählten Frequenz reicht aus, um die durch die Registriergeschwindigkeit vorgeschriebenen Bandbreitenforderungen für den Verstärker zu erfüllen.

Sekundärelektronen-Vervielfacher. Als Empfänger benutzen wir einen Vervielfacher (SEV) der Firma Maurer mit 11 Vervielfacherstufen. (Np J 11 typ 69). Je nach dem gewählten Spektralbereich wurde eine rot- und ultrarot-empfindliche oder violett- und ultraviolett-empfindliche Zelle eingesetzt. Wegen des relativ kleinen räumlichen Abstandes des Vervielfachers vom Synchronmotor mußte neben einer elektrischen auch für eine magnetische Abschirmung der Zelle gesorgt werden. (Sie besteht aus drei 2 mm starken Eisentöpfen). Die Spannung für den Vervielfacher liefert ein doppelt stabilisiertes Betriebsgerät der Firma Maurer (N_{SEV} , Abb. 2), in dem wir den variablen Arbeitswiderstand durch einen festen Widerstand von $300 \text{ K } \Omega$ ersetzen. Da wir eine Nachverstärkung des Vervielfachersignals durchführen, werden für die Betriebsspannung nur die niederen

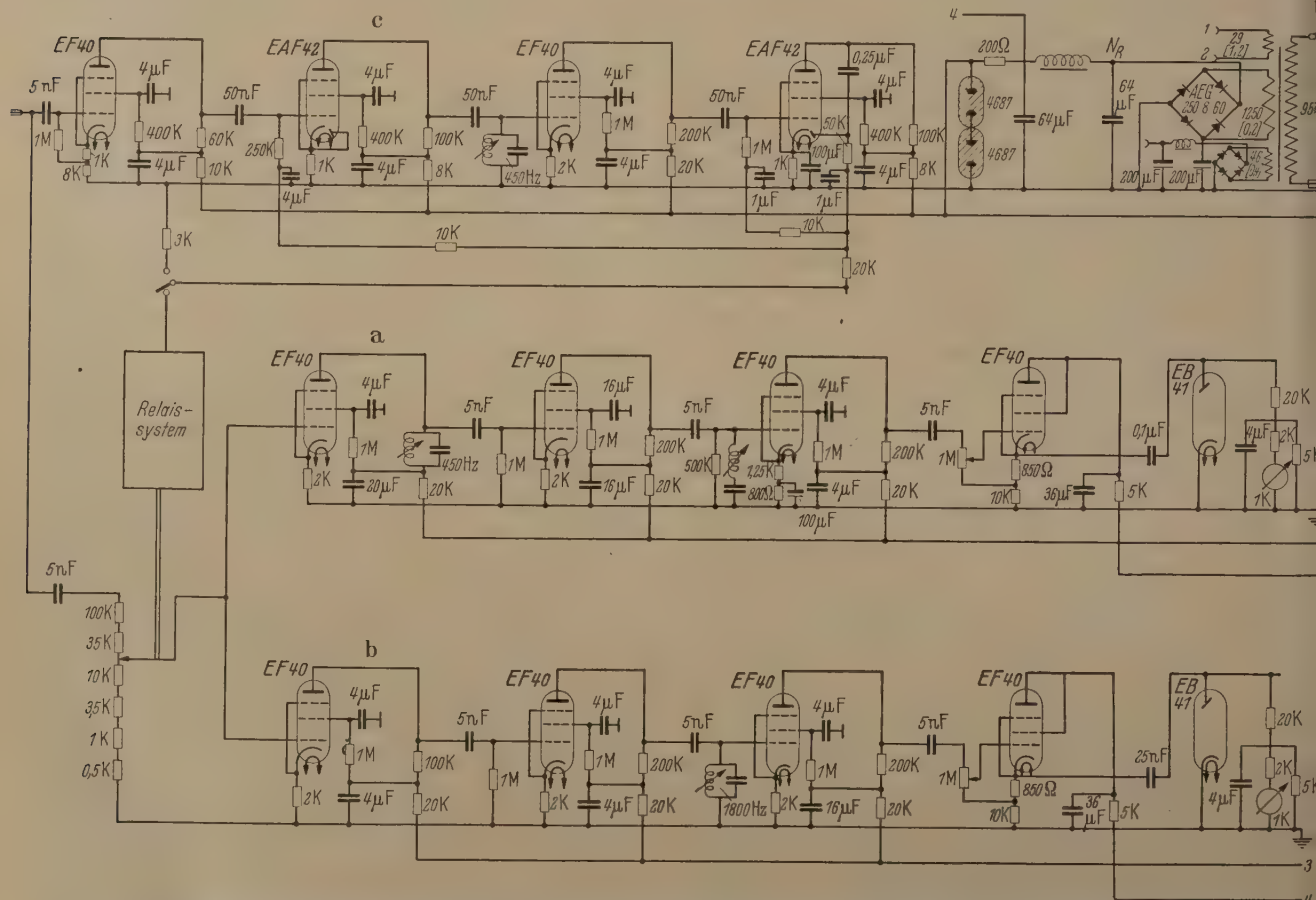


Abb. 3. Verstärkeranordnung zum Spektralphotometer. a = Meßverstärker, abgestimmt auf 450 Hz; b = Meßverstärker, abgestimmt auf 1800 Hz; c = Regelverstärker mit großem Aussteuerbereich steuert das Relaisystem, das die Eingangsempfindlichkeit der Meßverstärker der jeweiligen Empfindlichkeit des SEV anpaßt. N_R = Stabilisiertes Netzgerät.

tufen benötigt, so daß die Bedingungen für die Stabilisierung günstig sind.

Der mechanische Aufbau des Photometerzusatzes. Alle Bauteile wurden in einem geschlossenen, innen eloxierten Gehäuse untergebracht. Um eine weitgehende mechanische Entkopplung des Antriebsmotors für die Sektorenscheibe von der Optik und vom Vervielfacher zu erreichen, wurde der Motor in einem Durchbruch des Gehäusebodens angeordnet. Weiter wurde zur Verhinderung von Schwingungsübertragung der Motor auf einem ölgedämpften Federlager aufgebaut. Der Gehäusedeckel des Photometerzusatzes ist abnehmbar. Eine Klappe gestattet das bequeme Auswechseln der Küvetten. Für die Spiegelhalterung hat sich eine Anordnung sehr bewährt, die eine bequeme Justierung des Strahlenganges in kürzester Zeit gestattet. Der Spiegel ist im Mittelpunkt eines Kugelgelenkes gelagert; er wird mit Hilfe eines Zapfens in die gewünschte Lage gebracht und dann durch eine Feststelleinrichtung arretiert.

5. Aufbau der elektrischen Anordnung.

a) Meßverstärker. Die Meßverstärker haben die Aufgabe, die über den Arbeitswiderstand des Sekundärelektronen-Vervielfachers entstehenden Wechselspannungen von 450 Hz und 1800 Hz zu trennen, linear zu verstärken und zur Anzeige zu bringen. Abb. 3 zeigt den Verstärkeraufbau. Jeder der beiden Meßverstärker (Resonanzverstärker, R_{450} , R_{1800}) besteht aus vier Verstärker- und einer Gleichrichterstufe. Die erste Stufe dient zur Auskopplung der beiden Wechselspannungen. Das selektive Glied liegt bei dem einen Verstärker (450 Hz) im Anodenkreis der ersten Stufe, bei dem anderen (1800 Hz) im Gitterkreis der dritten Stufe. Ein Saugkreis im Gitter der dritten Stufe sorgt bei dem 450-Hz-Verstärker für eine ausreichende Nachselektion. Die Bandbreite beträgt 80 Hz. Zur Erzielung der für die niedrigen Frequenzen notwendigen relativ hohen Kreisgüten wurde als Kernmaterial Ferroxcube (Topferkerne) verwandt. Die Abstimmung der Schwingkreise erfolgt über die Induktivitäten.

Um mit einem ausreichenden Gegenkopplungsgrad arbeiten zu können und damit die Arbeitsweise des Gerätes von Betriebsspannungsschwankungen unabhängiger zu machen, wurde die Verstärkung auf drei Stufen verteilt. Zur Anpassung an die niederohmige Gleichrichterstufe mit dem Meßinstrument dient die vierte Stufe, die als Kathodenverstärker geschaltet ist. Der innere Widerstand des Meßinstrumentes beträgt 1 K Ω . In den drei ersten Stufen und der folgenden Kathodenverstärkerstufe ist die Linearität im Rahmen der vorgegebenen Fehlergrenze gewährt. Wegen der Krümmung der Diodenkennlinie ist dagegen in der Gleichrichterstufe die Linearitätsforderungen für Spannungen unter 30 μ V Eingangsspannung nicht mehr erfüllt. Eine Korrektionskurve gestattet aber, für jeden gemessenen

Wert den entsprechenden korrigierten Wert abzulesen.

Die Stromversorgung erfolgt über ein stabilisiertes Netzgerät (N_R).

b) Automatische Verstärkeranpassung. In dem Verstärker mit annähernd logarithmischer Kennlinie (R_{log}), der als Resonanzverstärker auf die Unterbrechungs-frequenz des Vergleichsstrahls abgestimmt ist, wird die über dem Arbeitswiderstand des Sekundärelektronen-Vervielfachers entstehende Spannung verstärkt und über die Diode der letzten Stufe gleichgerichtet. Mit diesem Gleichstrom steuert der Verstärker ein Relaisystem (R_{Rel}), das seinerseits die Umschaltung der Widerstandskette vornimmt.

Ein sauberes Arbeiten des Relaisystems ist nur bei einem konstanten Kontaktdruck während der gesamten Schaltzeit gewährleistet. Bei der Verwen-

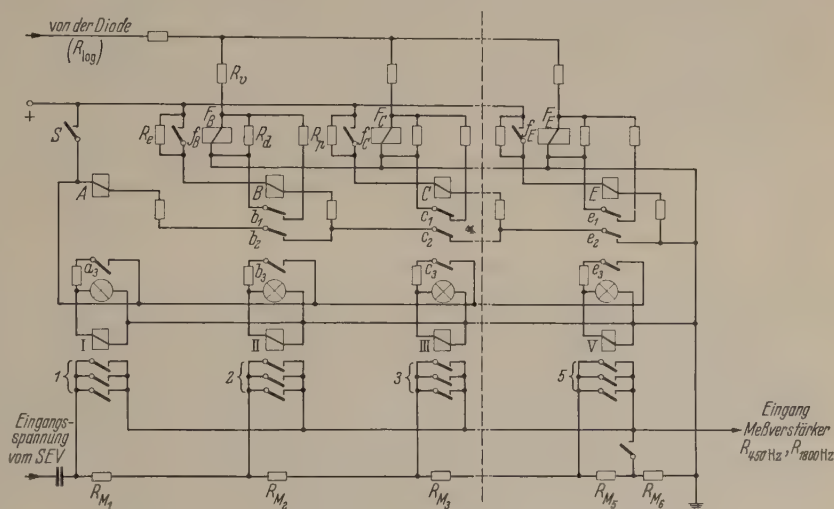


Abb. 4. Relaisystem zur automatischen Empfindlichkeitsumschaltung. Der Diodenstrom des R_{log} durchfließt als Schaltstrom vier parallelgeschaltete Feinrelais F_B — F_E . Die Feinrelais sind durch Vorwiderstand (R_p) und Parallelwiderstand (R_d und R_p) so eingestellt, daß sie nacheinander immer dann umschalten, wenn das Ende des Aussteuerungsbereiches der Meßverstärker erreicht ist. F_B bis F_E = Feinrelais mit den Kontakten f_B bis f_E ; A bis E = Schaltrelais mit den Kontaktpaaren a_1 — a_5 bis e_1 — e_5 ; I bis V = Schaltrelais zur Bereichsumschaltung der Widerstandskette R_{M1} bis R_{M5} mit den Kontakten 1 bis 5 ; S = Schalter.

nung eines einfachen Meßrelais ist diese Bedingung nicht zu erfüllen, da die Kontaktkraft vom Wert Null an mit ansteigendem Schaltstrom zunimmt. Wir benötigen also ein Relaisystem, in dem ein empfindliches, nach dem Galvanometerprinzip arbeitendes Feinrelais (Meßrelais) mit dem einen Schaltrelais zusammenarbeitet.

Abb. 4 zeigt die Arbeitsweise des Systems. Der Schaltstrom des logarithmischen Verstärkers durchfließt die parallel geschalteten Meßrelais (F_B — F_E), die so geschuntet sind, daß sie nacheinander immer dann ansprechen, wenn das Ende des Aussteuerbereiches der Meßverstärker erreicht ist. Jedes Meßrelais schließt den Stromkreis für ein Schaltrelais (A — E), das mit einer festen Spannung betrieben wird und daher unter konstantem Kontaktdruck einschaltet. Würden keine weiteren Maßnahmen ergriffen, dann bestände die Gefahr, daß besonders bei kleinen Änderungen der Meßgröße eine unerwünschte Kontaktdruckschwankung oder sogar ein Flattern der Relais in den Umschaltpunkten eintreten könnte. Das wurde dadurch verhindert, daß jedem Meßrelais ein Widerstand R_p parallel geschaltet ist, der über ein Kontakt-

paar des Schaltrelais ausgeschaltet wird. Damit steigt augenblicklich der Schaltstrom an, der Kontaktdruck wird sprunghaft erhöht und das Flattern verhindert. Zum Schutz gegen Funkenbildung an den Meßkontakten wurden diese mit einem Widerstand R_E überbrückt.

Die Schaltrelais (A—E) besitzen drei Kontaktpaare. Das erste Kontaktpaar b_1 schaltet den Parallelwiderstand, wie eben erwähnt, aus. Das zweite Kontaktpaar b_2 hat die Aufgabe, den Stromkreis für das vorhergehende Relais zu unterbrechen und eine Signallampe zur Bereichsanzeige einzuschalten. Das dritte Kontaktpaar b_3 schaltet ein weiteres Schaltrelais (I—V), das den entsprechenden Bereich des Meßverstärkereinganges (Widerstandskette, R_M) einschaltet. Seine drei Schaltkontakte arbeiten zur besseren Kontaktgabe parallel.

Die Eingangswiderstände der Meßverstärker, die auf 0,2% genau abgeglichen sind, haben die Widerstandswerte

100 K Ω 35 K Ω 10 K Ω 3,5 K Ω 1,5 K Ω

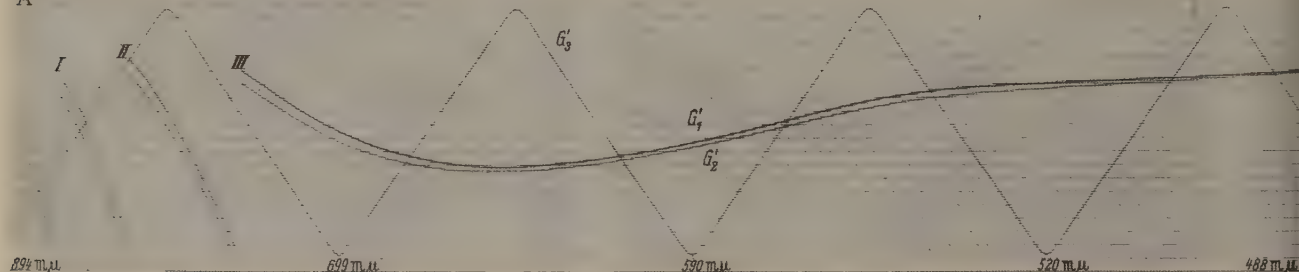
Die Eingangsempfindlichkeit wird somit beim Umschalten um die folgenden Faktoren herabgesetzt:

Stufe	I	II	III	IV	V
Faktor	0,3	0,1	0,03	0,01	0

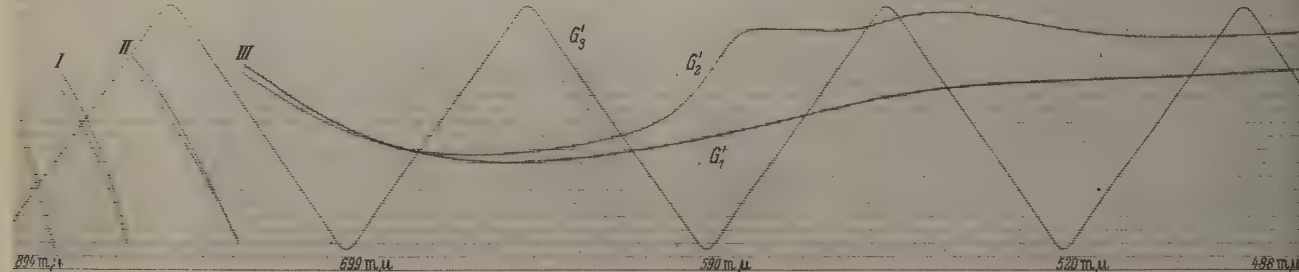
c) Registriereinrichtung und mechanischer Aufbau der Verstärker- und Relaisanordnung. Meßwert und Vergleichswert werden von zwei Drehbügelgalvanometern (Ruhstrat DSG) mit einer Schwingungsdauer $T_0 = 0,05$ sec angezeigt und mit Hilfe eines Photokymographions registriert. Der Papiervorschub beträgt gewöhnlich 1 cm/sec. Zum Zweck der Wellenlängenregistrierung ist der Abgriff eines Feinpotentiometers (Ringpotentiometer) mit der Achse des Wellenlängenantriebs des Monochromators gekoppelt. Die jeweils vom Ringpotentiometer abgegriffene Teilspannung entspricht der eingestellten Wellenlänge und wird von einem dritten Galvanometer angezeigt. Die Anzeigegenauigkeit liegt in der Größenordnung des maximalen Auflösungsvermögens des Monochromators.

Die beiden Meßverstärker, der logarithmische Verstärker und das Relaissystem wurden in einem gemeinsamen Gehäuse aufgebaut, während das Netzgerät gesondert untergebracht ist. Auf eine gute Abschirmung zwischen den einzelnen Meßstufen mußte besonderer Wert gelegt werden. Meßverstärker, logarithmischer Verstärker und das Relaissystem sind daher innerhalb des Gesamtgehäuses in gesonderten Abschirmkästen untergebracht. Darüber hinaus wurden die einzelnen Verstärkerstufen gegeneinander abgeschirmt. Die gegen mechanische Erschütterungen emp-

A



B



C

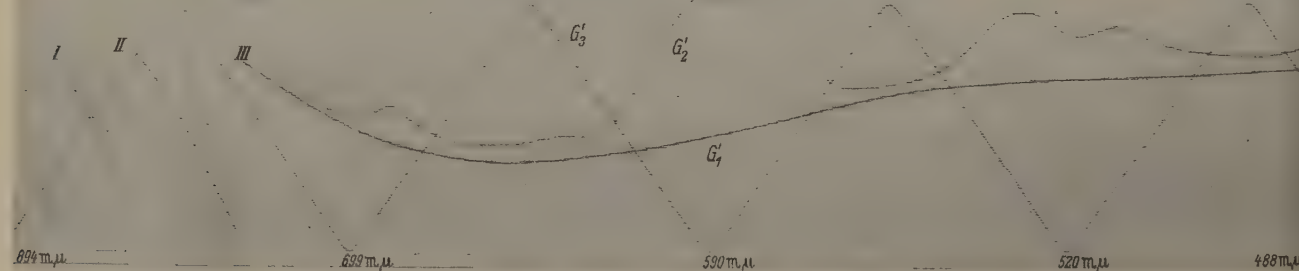


Abb. 5. Originalkurven. A = Leeraufnahme; B = Absorptionsspektrum des Kohlenoxydmyoglobins; C = Absorptionsspektrum eines Neodymfilters. — G'_1 = Vergleichsstrahl; G'_2 = Meßstrahl; G'_3 = Wellenlänge; I, II, III = Empfindlichkeitsumschaltung.

ndlichen Feinrelais sind einzeln in weichen Gummialterungen gelagert. Die Eingangswiderstände wurden mit den zugehörigen Schaltkontakten gesondert abgeschirmt.

6. Arbeitsweise des Photometers.

Anhand der Abb. 2 soll nun die Wirkungsweise des Spektralphotometers noch einmal im Zusammenhang erläutert werden. Die Lichtquelle (Li) wird auf den Eintrittsspalt (E_M) des Doppelmonochromators (M) abgebildet. Der aus dem Austrittsspalt A_M austretende monochromatische Lichtstrahl wird in zwei Anteile (1,2) zerlegt. Der Vergleichsstrahl (1) wird nach Durchgang durch eine Küvette mit dem Lösungsmittel (K_1) mit Hilfe einer Spiegeloptik auf die Photokathode eines Vervielfachers abgebildet. Der Meßstrahl (2) gelangt nach Durchgang durch eine Küvette mit der Lösung (K_2) auf dieselbe Photokathode (SEV). Eine Aperturblende B_P ermöglicht für beide Strahlengänge bei herausgenommener Küvette die Einstellung auf gleiche Lichtintensitäten. Die rotierende Sektorenscheibe unterbricht den Vergleichsstrahl (1) mit einer Frequenz von 450 Hz, den Meßstrahl (2) mit einer Frequenz von 1800 Hz. Die beiden über dem Arbeitswiderstand des Vervielfachers entstehenden Wechselspannungen werden durch die beschriebenen Resonanzverstärker (R_{450} , R_{1800}) getrennt, linear verstärkt, gleichgerichtet und von zwei Drehbügelgalvanometern (G_1 , G_2) zur Anzeige gebracht. Der den gesamten Aussteuerbereich erfassende Verstärker (R_{log}) in Verbindung mit dem Relaisystem R_{Rel} schaltet automatisch die Eingangsempfindlichkeit der Meßverstärker so um, daß sie der jeweiligen spektralen Empfindlichkeit des Vervielfachers angepaßt ist. Die für das kontinuierliche Durchlaufen des Spektrums notwendige Prismendrehung im Monochromator (Wellenlängeneinstellung) wird von einem Gleichstrommotor M_W mit automatischer Rücksteuerung durchgeführt, die jeweilige Stellung des Prismas über ein Potentiometer (P_G) durch ein drittes Galvanometer G_3 angezeigt. Die Ausschläge von G_1 , G_2 und G_3 werden registriert von einem Photokymographion (Ky).

Abb. 5 gibt 3 Originalkurven wieder: A) zeigt eine Leeraufnahme. Die Form der Kurven ist durch die unterschiedliche Emission der Lichtquelle und die verschiedene Empfindlichkeit der Photokathode in den einzelnen Wellenlängenbereichen bedingt. B) stellt das Absorptionsspektrum des CO-Myoglobins und C) das eines Neodymfilters dar. Die Aufnahme des abgebildeten Spektralbereiches von 894–488 $m\mu$ dauerte 49 sec. Die Zick-Zackkurve (G'_3) gibt die Stellung der Wellenlängentrommel an. (G'_2) entspricht dem Meßstrahl (2), (G'_1) dem Vergleichsstrahl (1). Bei I, II und III erfolgt die automatische Empfindlichkeitsumschaltung.

Aus der Umschaltung auf den bekannten Bruchteil der Empfindlichkeit ergibt sich die Null-Linie. Sie liegt am oberen Rand, so daß Absorptionsbanden durch Ausschläge nach oben gekennzeichnet sind. Nach Ausmessung der Amplituden ergibt sich aus dem Logarithmus ihres Quotienten die Extinktion.

Zusammenfassung.

Für die Untersuchung der Sauerstoffversorgung tierischer Zellen wurde ein der Geschwindigkeit der Austauschvorgänge angepaßtes Spektralphotometer entwickelt und in einigen Testversuchen erprobt. Es arbeitet als Zweistrahl-Einzellengerät nach dem Prinzip der Ausschlagsmethode mit kontrolliertem Nullpunkt und hat folgende Eigenschaften:

1. Bei 20 Meßpunkten pro sec kann ein spektraler Bereich von ca. 300 $m\mu$ in 0,5 bis 1 min registriert werden.

2. Das Auflösungsvermögen erlaubt im sichtbaren Spektralgebiet die Linientrennung in einem Wellenlängenintervall kleiner als 1 $m\mu$. Der Meßbereich umfaßt das ultrarote, sichtbare und ultraviolette Spektralgebiet.

3. Die Meßgenauigkeit ist bei der genannten Registriergeschwindigkeit besser als 1%.

In der Arbeit wird das Gerät eingehend dargestellt und seine Arbeitsweise beschrieben.

Herrn Professor KROEBEL, Herrn Professor OPITZ † sowie Herrn Professor LULLIES und Herrn Dr. KOEHLER sind wir für verständnisvolle Unterstützung und Förderung zu Dank verpflichtet. Die Arbeit wurde mit Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft ausgeführt.

Literatur. [1] CHANCE, B.: Rev. Scient. Instrum. **21**, 3, (1950). — [2] DUVE, CHR. DE: Acta Chemica Scandinavica **2**, 264 (1948). — [3] HANSEN, G.: Optik, **8**, 6, 251, (1951). — [4] HANSEN, G.: Optik, **8**, 9, 425, (1951). — [5] HARDY, J. D. and A. I. RYER: Phys. Rev. **55**, 1112, (1939). — [6] JACOBSON, S. and H. E. BENT, and A. J. HARRISON: Rev. Scient. Instrum. **11**, 220, (1940). — [7] KORTÜM, G.: Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1948). — [8] KREUZER, F.: Habilitationsschrift Fribourg (1953). — [9] KROEBEL, W.: Methoden und Anwendung der Wechselstromspektroskopie, Tagungsbuch des Physikal. Ges., Bd. I. — [10] LEHRER, E.: Z. f. techn. Phys. **23**, 169, (1942). — [11] MILLIKAN, G. A.: Proc. Roy. Soc. London B **123**, 218, (1937). — [12] OPITZ, E. und M. SCHNEIDER: Ergebn. Physiol. **46**, 125, (1950). — [13] SAVITZKY, A. and R. S. HALFORD: Rev. Scient. Instrum. **21**, 203, (1950). — [14] THEORELL, H.: Biochem. Z. **268**, 55, (1934). — [15] THEWS, G.: Acta Biotheoretica **10**, 3/4, (1950). — [16] THEWS, G.: Dissertation Kiel (1954).

Dr. GERHARD THEWS Dr. DIETRICH LÜBBERS
Institut für angewandte Physik Physiologisches Institut
der Universität Kiel.

Magnetische Untersuchungen über die Orientierungs- und Amplitudenverteilung innerer Spannungen in plastisch gedehnten Metallen.

Von LUDWIG REIMER.

Mit 9 Textabbildungen.

(Eingegangen am 27. Januar 1955.)

Einleitung.

In einer früheren Arbeit [1] [2] konnte gezeigt werden, daß unter der Annahme einachsiger innerer Spannungen in Probenrichtung bei plastisch gedehntem Nickel und Eisen die magnetisch aus der reversiblen Magnetisierungsarbeit nach KERSTEN [4] ermittelten Eigenspannungen mit den röntgenographisch aus der Linienverschiebung erhaltenen Eigenspannungen übereinstimmen. Eine irreversible Remanenzänderung bei plastisch gedehntem Nickel [3] konnte ebenfalls durch diese einachsigen inneren Spannungen gedeutet werden, die nach MASING und HEYN [5] durch die Orientierungsabhängigkeit der Streckgrenzen als Verzerrungen zwischen den Kristalliten des vielkristallinen Haufwerkes entstehen und als Funktion der Orientierung der einzelnen Körner nach einer Theorie von GREENOUGH [6] berechnet werden können.

In den zahlreichen Arbeiten, die bislang über innere Spannungen in kaltverformten Metallen durchgeführt wurden, wird meistens nur ein pauschaler Mittelwert der inneren Spannungen angegeben. Für die Frage der Entstehung von inneren Spannungen und wie hierdurch physikalische Meßgrößen beeinflusst werden, ist es wünschenswert, weitere Angaben zu erhalten, um einen Eigenspannungszustand möglichst vollständig charakterisieren zu können. In der Spannungstheorie der Koerzitivkraft (KERSTEN [7]) taucht z. B. der Ausdruck δ/l als Quotient aus der Dicke einer BLOCHschen Wand und der mittleren Periodizitätslänge l der Eigenspannungen auf. Neben dieser räumlichen Erstreckung l , die gewissermaßen angibt, in welchem Bereich man einen Eigenspannungszustand noch als homogen ansehen kann, interessiert die räumliche Verteilung der Hauptspannungsrichtungen in der Probe. Die Häufigkeit, Hauptspannungsrichtungen mit einem Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ zur Probenrichtung anzutreffen, werde mit Orientierungsverteilungsfunktion bezeichnet. In ähnlicher Weise sei eine Amplitudenverteilungsfunktion definiert, die Aussagen über die Beträge der Eigenspannungen macht, unabhängig von deren Richtung zur Probenachse.

Auch die Form des Spannungstensors ist von gewissem Interesse. In der Theorie der reversiblen Magnetisierungsarbeit wurde von KERSTEN [4] gezeigt, daß sich ein kugelsymmetrischer Eigenspannungszustand, bei dem die Hauptspannungen gleiche Größe besitzen, nicht in einer Zunahme der reversiblen Magnetisierungsarbeit bemerkbar macht. Sobald die örtlichen Verzerrungen jedoch durch einen einachsigen Spannungstensor beschrieben werden können, bewirken diese eine Zunahme der reversiblen Magnetisierungsarbeit, auch wenn die Hauptspannungsrichtungen verschiedener Bereiche regellos in der Probe verteilt sind.

Zur vollständigen Beschreibung eines vorliegenden Eigenspannungszustandes braucht man also mehr Bestimmungsstücke als nur die Angabe eines pauschalen Mittelwertes. Es interessiert dabei nicht so sehr die

Beschreibung des Spannungszustandes in jedem einzelnen Kristalliten, als vielmehr eine statistische Aussage über das Verhalten der Gesamtzahl aller Kristallite der Probe. Trotzdem ist es zweckmäßig, von den Größen auszugehen, die eine vorgegebene Verzerrung im Kleinen vollständig beschreiben, um von hieraus eine Erweiterung auf makroskopisch interessante Größen zu gewinnen. In der nachfolgenden Tabelle sind in der ersten Spalte die Größen angegeben, die einen Elementarbereich beschreiben, und in der zweiten Spalte findet man die abgeleiteten Größen als statistische Aussagen über den Eigenspannungszustand der gesamten Probe.

Elementarbereich	Gesamte Probe
Spannungstensor	Amplitudenmittelwert, Amplitudenverteilungsfunktion, Eigenspannungszustand (z. B. kugelsymmetrisch oder einachsig)
Orientierung der Hauptspannungsrichtung zur Probenachse	Orientierungsverteilungsfunktion der inneren Spannungen
Räumliche Erstreckung	„Spektrum“ der Eigenspannungen, Amplitude in Abhängigkeit von der räumlichen Erstreckung.

Für die HEYN-Spannungen II-Art sollen in dieser Arbeit Untersuchungen mitgeteilt werden, welche zeigen, daß man durch magnetische Messungen gewisse Aufschlüsse über die Orientierungs- und Amplitudenverteilung der inneren Spannungen erhalten kann.

Messungen der irreversiblen Remanenzänderung nach plastischer Verformung.

Die von FÖRSTER und STAMBEKE [8] und DEHLINGER und SCHOLL [9] gefundene irreversible Remanenzänderung nach einer plastischen Dehnung wurde vom Verfasser [3] darauf zurückgeführt, daß die Zahl der Kristallite mit Druckeigenspannungen in Probenrichtung etwas größer als diejenige der Kristallite mit Zugeigenspannungen ist. Da nämlich bei Nickel sich die Magnetisierungsvektoren in die Richtung größter Stauchung einstellen, gibt es im Punkte der Remanenz bei Vorliegen von einachsigen Druck- und Zug-Eigenspannungen in Probenrichtung nur die Möglichkeit einer Parallel- und Senkrechtstellung zum Feld. Das Ergebnis, daß nach einer plastischen Dehnung die Druckeigenspannungen in Probenrichtung überwiegen, wurde aus der Orientierungsabhängigkeit der Streckgrenzen eines einzelnen Kristalliten im vielkristallinen Haufwerk gefolgert [3]. Würde man aber eine Nickelprobe einachsig stauchen, so wäre das umgekehrte Ergebnis zu erwarten, daß nämlich die Zugeigenspannungen in Probenrichtung überwiegen, d. h. es müßte sich in diesem Falle eine Abnahme der Remanenz nach plastischer Stauchung ergeben. Magnetisiert man

ndererseits eine gereckte Probe quer zur ursprünglichen Zugrichtung, so muß ebenfalls eine Remanenzniedrigung resultieren, da jetzt die Druckeigenspannungen quer zur Magnetisierungsrichtung stehen. Wenn nun also die Remanenz bei Längsmagnetisierung in Probenrichtung und bei Quermagnetisierung verglichen, müßten sich diese um den doppelten Betrag unterscheiden, der früher [3] zwischen einer gereckten und spannungsfreien Probe zu etwa 30 Gauß gefunden wurde. Zur Durchführung dieser Untersuchungen wurde aus einer Zug- und Druckprobe nach der plastischen Verformung eine würfelförmige Probe herausgearbeitet, die in einer Jochanordnung vermessen wurde. Die Einstellung der wahren Feldstärke Null an der Probenoberfläche erfolgte mit einem magnetischen Spannungsmesser. Für die Remanenz bei einem Feld in der ursprünglichen Beanspruchungsrichtung ($J_{R||}$) und in den beiden anderen Querrichtungen des Würfels ($J_{R\perp}$) ergaben sich für Nickel die folgenden Werte:

22% gereckt: $J_{R||} = 270 \text{ Gß}$, $J_{R\perp} = 210 \text{ Gß}$,
 $J_{R||} - J_{R\perp} = 60 \text{ Gß}$,
 27% gestaucht: $J_{R||} = 205 \text{ Gß}$, $J_{R\perp} = 275 \text{ Gß}$,
 $J_{R||} - J_{R\perp} = -70 \text{ Gß}$.

Die Remanenz im spannungsfreien Ausgangszustand betrug bei allen Proben 240 Gß. Die Meßergebnisse entsprechen also durchaus den theoretischen Erwartungen, daß die Remanenzänderung in den verschiedenen Magnetisierungsrichtungen und bei den verschiedenen Verformungsarten mit entgegengesetztem Vorzeichen auftritt.

Bei Eisen stellen sich nicht die Magnetisierungsvektoren wie bei Nickel unter Einwirkung der Eigenspannungen in eine elastische Vorzugslage. Da die nach einer plastischen Dehnung auftretenden Eigenspannungen etwa die gleiche Abhängigkeit von der Orientierung eines Kristalliten zur Lastrichtung haben, wie die Magnetostraktion in Feldrichtung, resultiert trotzdem ein Anteil der reversiblen Magnetisierungsarbeit, der auf Eigenspannungen zurückzuführen ist [2]. Der obere Ast der Magnetisierungskurve einer gereckten Eisenprobe verläuft immer unterhalb derjenigen einer spannungsfreien Probe. Nach diesen Vorstellungen müßte nach einer Druckbeanspruchung umgekehrt die Kurve des verformten Materials oberhalb derjenigen einer spannungsfreien Probe verlaufen, da die inneren Spannungen in den betreffenden Kristalliten jetzt entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen. Dies konnte experimentell an einem Eisenwürfel der wieder aus einer Druckprobe herausgearbeitet war, bestätigt werden. In Abb. 1 ist die Differenz der Magnetisierungen einer auf diese Weise verformten und spannungsfreien Probe gegen die Feldstärke aufgetragen. Die Magnetisierung der spannungsfreien Probe wurde an demselben Würfel nach 2 stündigem Glühen bei 700° C erhalten. Zum Vergleich sind die Messungen an einem gereckten Stab angegeben [2].

Der Würfel wurde ebenfalls in Querrichtung magnetisiert. Da jetzt kein eindeutiger Zusammenhang mehr zwischen den Eigenspannungen und den Orientierungen der Kristallite zur Feldrichtung (quer zur Beanspruchungsrichtung) besteht, resultiert ein völlig anderer Verlauf der Magnetisierung.

Diese Messungen zeigen, daß die Annahme eines einachsigen Spannungszustandes in Beanspruchungs-

richtung sich magnetisch nachweisen läßt. Auf keinen Fall liegt eine regellose Verteilung der zur Beobachtung gelangenden Eigenspannungen II. Art vor, da dann kein Unterschied zwischen Quer- und Längsmagnetisierung zu erwarten wäre.

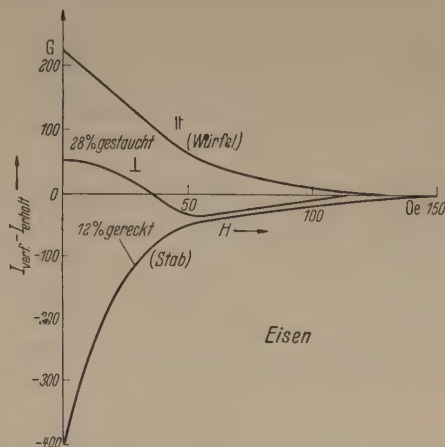


Abb. 1. Unterschied in der Magnetisierung einer gestauchten und spannungsfreien Eisenprobe bei Magnetisierung in und quer zur Beanspruchungsrichtung. Zum Vergleich Messungen an einer Zugprobe.

Remanenzänderung unter Zug.

VON KERSTEN [10] wurde ein Verfahren angegeben, um aus der Abnahme der Remanenz unter Einwirkung kleiner aufgelegter Prüflasten die inneren Spannungen in einer Nickelprobe zu ermitteln. Die zur Anwendung dieses Verfahrens nötigen Prüflastspannungen von 1 bis 2 kg/mm² sind dabei noch so klein, daß die Remanenzänderung reversibel verläuft. Von FÖRSTER und STAMBEKE [8] sind Versuche mitgeteilt worden, in denen die zusätzlich aufgelegten Lasten diese Grenze überschreiten. In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, eine umfassendere Theorie der Remanenzänderung unter Zug aufzustellen und durch Vergleich mit dem Experiment Aufschlüsse über die Orientierungs- und Amplitudenverteilung der inneren Spannungen zu erhalten.

Die Magnetisierungsvektoren stellen sich in Nickel auf Grund der negativen Magnetostraktion in die Richtung größter Stauchung ein, wenn die elastische Energie der Eigenspannungen die Kristallenergie überwiegt. Da die Kristallenergie bei Nickel klein ist, ist dieses schon bei kleinen Eigenspannungen von einigen kg/mm² der Fall. Im unbelasteten Zustand wird sich also der Magnetisierungsvektor in die Richtung der größten Druck-Eigenspannung einstellen. Wenn jetzt zusätzlich eine äußere Zugspannung in Probenrichtung wirkt, so überlagern sich die beiden Dehnungstensoren und die Richtung größter Stauchungen wird aus der Richtung der Druck-Eigenspannungen herausgedreht und steht schließlich, wenn die von außen angelegte Zugspannung die Druck-Eigenspannung im Betrage überwiegt, quer zur Zugspannung und damit Probenrichtung.

ϑ_0 bedeute den Winkel der Probenrichtung mit der Druck-Eigenspannung (Abb. 2) und ϑ den Winkel mit

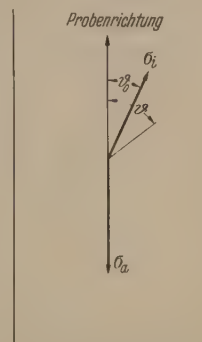


Abb. 2. Definition der Winkel ϑ_0 und ϑ .

einer zunächst beliebigen Richtung, in welcher sich die resultierende Dehnung nach der Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu

$$\varepsilon = \frac{\sigma_i}{E} \{1 - (\nu + 1) \sin^2(\vartheta - \vartheta_0)\} + \frac{\sigma_a}{E} \{1 - (\nu + 1) \sin^2 \vartheta\} \quad (1)$$

berechnet. Die Richtung maximaler Stauchung erhält man, wenn man (1) nach ϑ differenziert und die Ab-

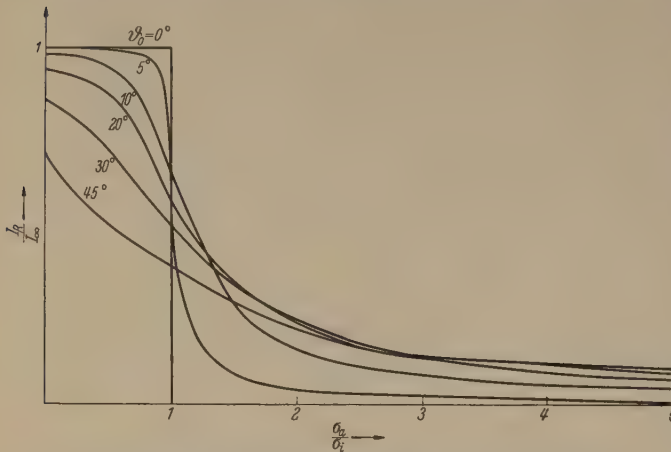


Abb. 3. Beitrag eines einzelnen Kristalliten zur Remanenz, dessen Hauptdruckspannung einen Winkel ϑ_0 mit der Probenrichtung bildet, unter der Einwirkung einer äußeren Zugspannung σ_a .

leitung gleich Null setzt. Diese Extremalbedingung liefert als Auflösung

$$\sin 2\vartheta = \pm \left[\operatorname{ctg} 2\vartheta_0 + \frac{1}{\sin 2\vartheta_0} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_i} + 1 \right]^{-1/2} \quad (2)$$

Der Beitrag eines einzelnen Kristalliten zur Remanenz berechnet sich nach der Formel

$$J_R = J_\infty \cos \vartheta. \quad (3)$$

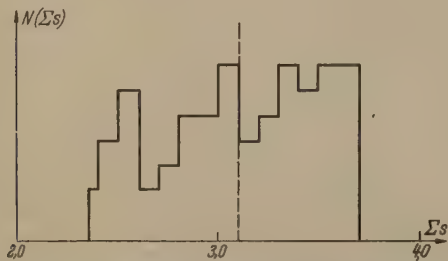


Abb. 4. Amplitudenverteilung der Streckgrenzen eines kubisch-flächenzentrierten Metalles, erhalten durch statistische Auswertung der minimalen Abgleichsumme (Σs) nach TAYLOR [11].

Setzt man den Wert von ϑ aus (2) hier ein, so resultiert

$$J_R/J_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{1}{1 + \left(\operatorname{ctg} 2\vartheta_0 + \frac{1}{\sin 2\vartheta_0} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_i} \right)^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (4)$$

Für verschiedene Werte von ϑ_0 ist die nach (4) berechnete Remanenz als Funktion von σ_a/σ_i in Abb. 3 aufgetragen. Es muß beachtet werden, daß σ_a als Zugspannung ein entgegengesetztes Vorzeichen wie die Druck-Eigenspannung σ_i besitzt. In dem Augenblick, wo $-\operatorname{ctg} 2\vartheta_0 = \frac{1}{\sin 2\vartheta_0} \cdot \frac{\sigma_a}{\sigma_i}$ wird, der entsprechende Klammerausdruck also verschwindet, muß das Vor-

zeichen unter der 1. Wurzel in (4) gewechselt werden, um eine sinnvolle Lösung des physikalischen Problems zu erhalten. Die Notwendigkeit dieses Vorzeichenwechsels kann man auch über eine Untersuchung der 2. Ableitung zeigen.

Diese Darstellung gibt also die Abnahme der Remanenz in einem einzelnen Kristalliten wieder. Wenn man eine Mittelwertbildung über Kristallite mit verschiedenen Eigenspannungsamplituden und verschiedenen Orientierungen der Hauptdruckspannungsrichtungen durchführen will, so müssen gewisse Voraussetzungen über die Amplituden- und Orientierungsverteilung der inneren Spannungen gemacht werden. Bevor hierauf näher eingegangen wird, soll noch kurz gezeigt werden, wie die Remanenzabnahme unter Zug mit der Amplitudenverteilung der inneren Spannungen zusammenhängt, wenn man voraussetzt, daß man streng einachsige Spannungen in Probenrichtung vorliegen hat ($\vartheta_0 = 0$). Wenn $F(\sigma_i)$ die Verteilungsfunktion der Druckeigenspannungen ist, so gibt $\int_0^{\sigma_a} F(\sigma_i) d\sigma_i / \int_0^\infty F(\sigma_i) d\sigma_i$ den Bruchteil der Kristallite an, in denen $\sigma_i < \sigma_a$ ist. In diesen Kristalliten liegt die Richtung größter Stauchung dann quer zur Probenrichtung. Die Remanenz stellt sich dann in der Form

$$J_R(\sigma_a) = J_R(\sigma_a = 0) \left[1 - \frac{\int_0^{\sigma_a} F(\sigma_i) d\sigma_i}{\int_0^\infty F(\sigma_i) d\sigma_i} \right] \quad (5)$$

dar.

Differenziert man diese Funktion nach σ_a , so bedeutet dies eine Differentiation nach der oberen Grenze des Integrals, was bekanntlich die Funktion $F(\sigma_i)$ unter dem Integral ergibt. $dJ_R/d\sigma_a$ ist demnach also direkt proportional der Amplitudenverteilungsfunktion. Wenn natürlich Querkomponenten der inneren Spannungen zur Probenrichtung auftreten und so die Richtung der Hauptspannung nicht mehr streng in Probenrichtung zeigt, gilt nicht mehr dieser einfache Zusammenhang.

Für die Amplitudenverteilung kann man nach einer Theorie von TAYLOR [11] eine theoretische Aussage machen. Nach GREENOUGH [6] entstehen die Eigenspannungen zwischen verschiedenen orientierten Kristalliten durch die Orientierungsabhängigkeit der Streckgrenzen. Nach TAYLOR ist die Streckgrenze eines einzelnen Kristalliten im vielkristallinen Haufwerk durch die Summe der Abgleitungen (Σs) in den 5 von einander unabhängigen Gleitrichtungen bestimmt, die nötig sind, um den Zusammenhalt an den Korngrenzen zu wahren. Diese (Σs)-Werte wurden von TAYLOR für verschiedene Orientierungen der Kristallite zur Probenrichtung ermittelt. An Hand dieser Werte wurde vom Verfasser eine grobe Abzählung vorgenommen (Abb. 4). Diese Darstellung gibt die Amplitudenverteilung der Streckgrenzen wieder. Nach der Entlastung der Probe sind die Kristallite mit der mittleren Streckgrenze (zugehöriges $\langle \Sigma s \rangle = 3,1$) spannungsfrei, die kleineren Streckgrenzen bewirken Druck- und die größeren Zug-Eigenspannungen der betreffenden Kristallite. Man sieht aus dieser Darstellung, daß man in erster Näherung die Amplitudenverteilung der inneren Spannungen als rechteckförmig ansehen kann.

Nach diesem von GREENOUGH vorgeschlagenen Entstehungsmechanismus der inneren Spannungen folgt aber auch, daß die Orientierungsverteilung einseitig in Probenrichtung ist. Etwaige Querkomponenten der Spannungen zwischen verschiedenen orientierten Kristalliten sind in der Theorie vernachlässigt, da sie in der quantitativen Rechnung nur schwer zugänglich sind.

Für die weitere Auswertung wurde eine rechteckförmige Amplitudenverteilung der inneren Spannungen vorausgesetzt, und zwar Eigenspannungen von 0 bis 10 kg/mm² mit gleicher Häufigkeit. Die Remanenz bei der äußeren Zugspannung σ_a und bei vorgegebenen Winkel ϑ_0 erhält man nach der Beziehung

$$J_R/J_\infty(\vartheta_0, \sigma_a) = \frac{\int_0^{\sigma_a} \frac{J_R}{J_\infty}\left(\vartheta_0; \frac{\sigma_a}{\sigma_i}\right) F(\sigma_i) d\sigma_i}{\int_0^\infty F(\sigma_i) d\sigma_i} \quad (6)$$

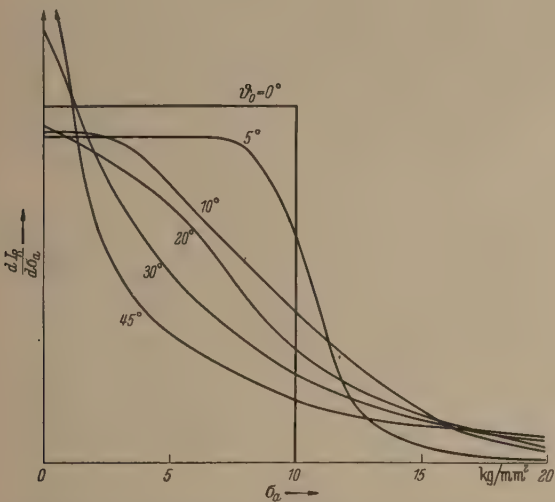


Abb. 5. Änderung der Remanenz mit wachsender Zugspannung unter der Annahme, daß innere Spannungen von 0 bis 10 kg/mm² mit rechteckförmiger Verteilung vorliegen, bei verschiedenen Winkeln ϑ_0 mit der Probenrichtung.

Dies Integral wurde graphisch mit den Kurven der Abb. 3 ausgewertet und die so erhaltenen Kurven graphisch differenziert; da es nach der Diskussion der Gl. (5) zweckmäßig ist, die Ableitung $dJ_R/d\sigma_a$ mit dem Experiment zu vergleichen. Das Ergebnis dieser Auswertung ist in Abb. 5 dargestellt. Es sei bemerkt, daß für $\vartheta_0 = 0^\circ$ nach (5) die vorausgesetzte Verteilungsfunktion resultiert.

Abb. 6 erhält die experimentell erhaltenen Kurven an Nickeldrähten von 1,7 mm Durchmesser, die verschieden stark vorgereckt waren und daher verschiedene Mittelwerte der Eigenspannungen aufweisen. Der Mittelwert der Eigenspannungen wurde nach der Methode der reversiblen Magnetisierungsarbeit an derselben Drahtprobe ermittelt. Der doppelte Wert dieser Größe ist gestrichelt als maximale Eigenspannung in das Diagramm eingetragen. Charakteristisch für alle Kurven ist der horizontale Anfangsteil, der auch in den Messungen von FÖRSTER und STAMBEKE [8] gefunden wurde. Ein Vergleich mit den Kurven der Abb. 5 ergibt, daß dies nur bis zu Winkeln ϑ_0 von 10° möglich ist. Wenn in einer größeren Zahl von Kristalliten die Eigenspannungen einen größeren Winkel mit der Probenrichtung bilden würden, so wäre ein horizontaler

Anfangsteil unmöglich. Dies gilt erst recht, wenn man eine andere Amplitudenverteilung der inneren Spannungen, etwa eine GAUSSsche Fehlerkurve, voraussetzen würde, da nach obigen Überlegungen die Remanenzabnahme durch Zug in erster Näherung proportional der Verteilungsfunktion ist.

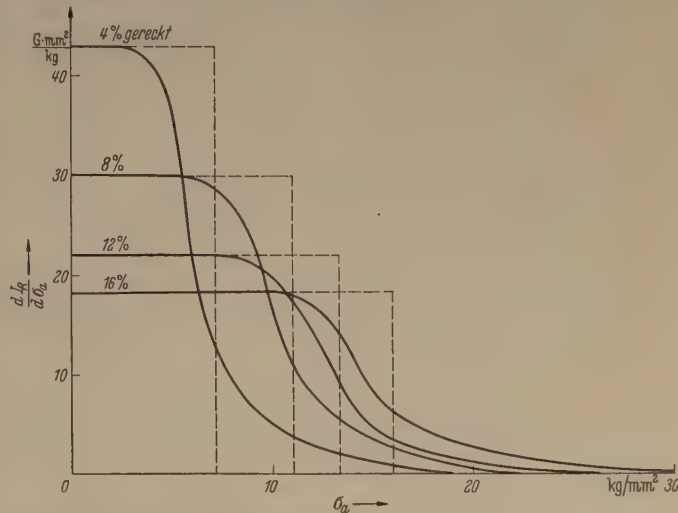


Abb. 6. Gemessene Abnahme der Remanenz mit wachsender äußerer Zugspannung bei verschieden starker Vorreckung der Nickel-Proben. Senkrecht gestrichelte Linien sind die inneren Spannungen erhalten nach dem Verfahren der reversiblen Magnetisierungsarbeit.

Wenn man als Amplitudenverteilung eine rechteckförmige beibehält und annimmt, daß die Orientierungen der Hauptspannungsrichtungen keinen größeren Winkel als etwa 10° mit der Probenrichtung bilden, so kann man auch erklären, warum die Remanenz, nachdem σ_a größer σ_i ist, noch nicht auf den Endwert abgefallen ist (Abb. 5). Für die GREENOUGHsche Theorie bedeuten diese Folgerungen, daß kein großer Fehler durch Vernachlässigung der Querspannungen ent-

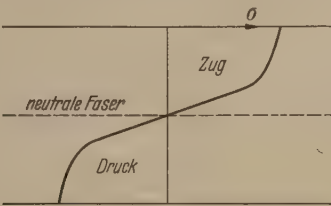


Abb. 7. Schematische Verteilung der Spannungen über der Querschnittshöhe eines Biegestabes.

steht, was bereits durch die gute Übereinstimmung dieser Theorie mit röntgenographischen Messungen der Gitterkonstantenänderungen bestätigt wurde [6] [12] [13].

Es soll noch ein Beispiel mitgeteilt werden, bei dem keine rechteckförmige Amplitudenverteilung der inneren Spannungen vorliegt. Ein ganz anderer Verlauf von $dJ_R/d\sigma_a$ ergibt sich nämlich, wenn man die inneren Spannungen durch Biegung erzeugt. Abb. 8 zeigt zwei Kurven an einem geglühten und düsengezogenen Draht (Anlieferungszustand), die im Ausgangszustand gekrümmt waren und zur Messung in ein eng anliegendes Glasrohr gezogen wurden. Abb. 7 zeigt den schematischen Spannungsverlauf über der Querschnittshöhe. In den äußeren Teilen setzt bereits plastische Verformung ein, so daß hier die Spannungen nicht die Streckgrenze überschreiten. Es ist aus dieser schematischen Zeichnung zu entnehmen, daß eine größere Zahl

von Kristalliten hohe Spannungen hat, womit der gemessene Verlauf von $dJ_R/d\sigma_a$ zu erklären ist. Das Maximum der Kurve des ausgeglühten Materials von etwa $2,5 \text{ kg/mm}^2$ entspricht dem Fließbeginn des Nickels, während das Maximum bei 30 kg/mm^2 der düsengezogenen Probe mit der gesondert bestimmten Streckgrenze dieser Probe übereinstimmt. Diese Untersuchung bestätigt also die oben abgeleitete Bezie-

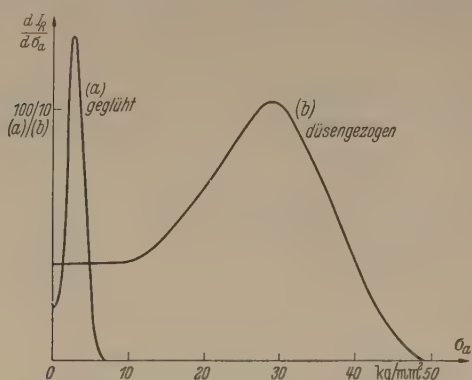


Abb. 8. Abnahme der Remanenz mit äußerer Zugspannung σ_a an gebogenen Proben, (a) spannungsfrei gegläht, (b) düsengezogen (Anlieferungszustand).

hung, daß man bei der Messung von $dJ_R/d\sigma_a$ bei einachsigen Spannungen in erster Näherung direkt die Amplitudenverteilung der inneren Spannungen erhält.

Es wurde schon zu Anfang darauf hingewiesen, daß bei kleinen Zugspannungen die Remanenzänderung reversibel verläuft. Bei größeren Zugspannungen werden jedoch in vielen Kristalliten mit kleinen Eigenspannungen und Orientierungen, die nur sehr wenig von der Probenrichtung abweichen, die Magnetisie-

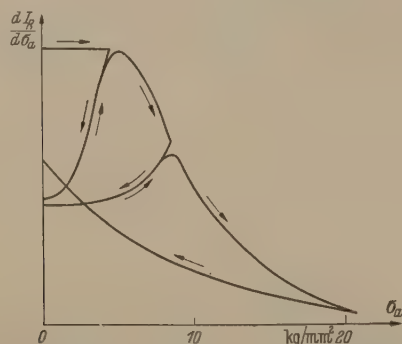


Abb. 9. Remanenzänderung unter Zug bei Ent- und Wiederbelasten einer Nickelprobe bei verschiedenen Höchstspannungen. Die Pfeile geben die Durchlaufrichtung des Diagramms an.

rungsvektoren quer zur Probenrichtung gedreht sein und nach der Entlastung wird dann eine Hälfte der Magnetisierungsvektoren auf der oberen und die andere Hälfte auf der unteren Orientierungshalbkugel der Richtung größter Stauchung folgen, so daß der Beitrag dieser Kristallite zur Remanenz verschwindet. Bei der Wiederbelastung fehlt dann der Beitrag dieser Kristallite zur Remanenzänderung und man findet Kurven der Remanenzänderung, wie sie in Abb. 9 reproduziert sind. Bei diesen Messungen wurde die Remanenz mit einem stark gedämpften Kriechgal-

vanometer gemessen, sodaß nicht vor jeder Messung die Probe magnetisch gesättigt zu werden brauchte, was diese Art der Einstellung der Magnetisierungsvektoren wieder rückgängig gemacht hätte. Die Pfeile geben die Richtung an, in der bei der Messung das gesamte Diagramm durchlaufen wurde. Man erkennt wie mit wachsender Beanspruchung die kleinen Eigenspannungen immer weiter durch die Aufspaltung der Magnetisierungsvektoren auf obere und untere Orientierungshalbkugeln für die Remanenz verloren gehen. Insbesondere ist die letzte Kurve interessant, die mit den Kurven für große σ_0 -Werte in Abb. 3 verglichen ergibt, daß zum Schluß nur noch in den Kristalliten mit hohen Eigenspannungen und Orientierungen, die am meisten von der Probenrichtung abweichen, die Magnetisierungsvektoren nach der Entlastung in ihre alte Lage zurückkehren, da diese einer Querstellung nach Abb. 3 den größten Widerstand entgegensetzen.

Man könnte daran denken, daß auch die Kristallenergie auf diese mitgeteilte Einstellung der Magnetisierungsvektoren von Einfluß ist. Messungen der Remanenzabnahme bei 200°C und bei Zimmertemperatur an derselben Probe konnten jedoch zeigen, daß der Einfluß der Kristallenergie auf $dJ_R/d\sigma_a$ außerhalb der Meßgenauigkeit liegt, denn bei dieser Temperatur verschwindet ja bekanntlich die Kristallenergie des Nickels.

Zusammenfassung.

Messungen der Remanenz an würfelförmigen Proben aus zug- und druckverformten Nickel und Eisen zeigen eine Anisotropie, die sich auf einachsige Spannungen in der ursprünglichen Beanspruchungsrichtung zurückführen läßt. Messungen der Remanenzänderung unter Zug an verschieden stark vorgereckten Nickeldrähten lassen sich durch eine rechteckförmige Amplitudenverteilung der inneren Spannungen erklären. Die Hauptspannungsrichtungen weichen höchstens um etwa 10° von der Beanspruchungsrichtung ab. Gebogene Proben liefern eine andere Verteilung der inneren Spannungen, die sich aber durch den Mechanismus der Biege-Verformung erklären lassen.

Der Vacuumschmelze AG Hanau sei an dieser Stelle für die freundliche Überlassung der Nickeldrahtproben gedankt.

Herrn Prof. Dr. E. KAPPLER danke ich für das dieser Arbeit entgegengebrachte Interesse.

Literatur. [1] KAPPLER, E. u. L. REIMER: *Naturw.* **40**, 523 (1953). — [2] REIMER, L.: *Z. angew. Phys.* **6**, 489 (1954). — [3] REIMER, L.: *Z. Phys.* **137**, 588 (1954). — [4] KERSTEN, M.: *Z. Phys.* **76**, 505 (1932). — [5] MASING, G. u. E. HEYN: *Wiss. Veröff. Siemens Konz.* **3**, 231 (1923). — [6] GREENOUGH, G. B.: *Proc. Roy. Soc. (A)* **197**, 556 (1949). — [7] KERSTEN, M.: *Grundlagen einer Theorie d. ferromagn. Hysterese u. d. Koerzitivkraft*, Leipzig 1944. — [8] FÖRSTER, F. u. K. STAMBEKE: *Z. Metallkd.* **33**, 976 (1941). — [9] DEHLINGER, U. u. H. SCHOLL: *Z. Metallkd.* **44**, 136 (1953). — [10] KERSTEN, M.: *Z. Phys.* **82**, 723 (1933). — [11] TAYLOR, G. I. u. C. F. ELAM: *Proc. Roy. Soc. (A)* **112**, 337 (1926). — [12] KAPPLER, E. u. L. REIMER: *Z. angew. Phys.* **5**, 401 (1953). — [13] HAUKE, V.: *Arch. f. Eisenhüttenwesen* **25**, 273 (1954).

Dr. L. REIMER
Physik. Institut d. Universität Münster, Westf.,
Schloßplatz 7.

Die Bolzen-Kathode.

Eine indirekt geheizte Wolframkathode für Elektronenkanonen.

Von ENIS B. BAŞ

Mit 12 Textabbildungen.

(Eingegangen am 7. Februar 1955.)

Ein wichtiger Bestandteil aller Elektronengeräte ist die Elektronenquelle, die Kathode. Die einfachste Glühkathode ist bekanntlich ein auf hohe Temperatur gebrachter Metallfaden. Diese sogenannten Reinmetallkathoden haben einen großen Nachteil, daß man sie auf sehr hohe Temperaturen bringen muß, wenn man eine hohe Emission erhalten will. Da für die technische Verwendbarkeit einer Glühkathode neben ihrer Lebensdauer auch die Emissionsstabilität eine große Rolle spielt, konnten aber die Reinmetallkathoden von den anderen Glühkathodenarten nicht völlig verdrängt werden. Die Lebensdauer und Emissionsstabilität hängt außer von der Betriebstemperatur noch von den Betriebsbedingungen, wie Vakuumgüte, Ionenbombardement, elektrische und mechanische Beanspruchung, Formbeständigkeit usw., ab. Die Vorteile von Reinmetall-Kathoden kann man in folgenden Punkten kurz zusammenfassen:

1. Relative Unempfindlichkeit gegen die Vakuumgüte,
2. Möglichkeit eines störungsfreien Betriebes an der Pumpe (Kohlenwasserstoffdämpfe, Lufteinlaß, schlechtes Vakuum!)
3. Relative Unempfindlichkeit gegen Ionenbombardement,
4. Wegfall jeglichen Aktivierungsprozesses,
5. Möglichkeit der Anwendung sehr hoher effektiver Feldstärken an der Kathode,
6. Möglichkeit der Erzeugung sehr hoher Richtstrahlwerte in den Elektronenkanonen.

Vor acht Jahren wurde uns die Aufgabe gestellt, für die Kathodenstrahlröhre¹ des Fernseh-Großprojektions-Systems nach dem Eidophor-Verfahren eine Kathode zu entwickeln, die unter denkbar ungünstigen Verhältnissen betriebssicher arbeiten sollte. Aus den oben dargelegten Gründen kam nur eine Reinmetall-Kathode in Frage. [1] Im folgenden soll über eine solche, nun zur industriellen Reife entwickelten Kathode, berichtet werden.

1. Prinzip der Bolzenkathode.

In den Strahlerzeugungssystemen hat man die Reinmetall-(Wolfram-)Kathoden durchwegs als sogenannte Haarnadelkathode in Gebrauch (wie z. B. bei den Elektrodennikroskopen). Diese Ausführung hat den Vorteil, daß sie sehr einfach ist und eine sehr kleine punktförmige Elektronenquelle liefert. Sie hat aber neben dem großen elektronenoptischen Nachteil einer undefinierten, unsymmetrischen Emissionsfläche, die sich insbesondere bei größeren Stromstärken und hohen Richtstrahlwerten sehr ungünstig auswirkt, auch die Nachteile schlechter Lagestabilität und kurzer Lebensdauer, die noch besonders stark durch das Ionenbombardement beeinflusst wird. Aus diesem Grunde ist man bei sehr großen Anforderungen gezwungen, spezielle indirekt geheizte Konstruktionen zu entwickeln.

Als Reinmetall-Kathoden kommen nur Wolfram- und Tantal-Kathoden und seltener noch Niob-Kathoden in Frage. Alle diese Kathoden benötigen Betriebstemperaturen über 2200° K. Dieser Umstand erschwert die indirekte Heizung beträchtlich, da eine reine Strahlungsheizung von einem Wolframheizer, wie bei den Oxydkathoden, nicht mehr ausreicht und stets zu der mehr oder weniger stark wirkenden Strahlungsheizung eine zusätzliche Heizung durch das Elektronenbombardement zukommen muß. Für die Kathoden von Elek-

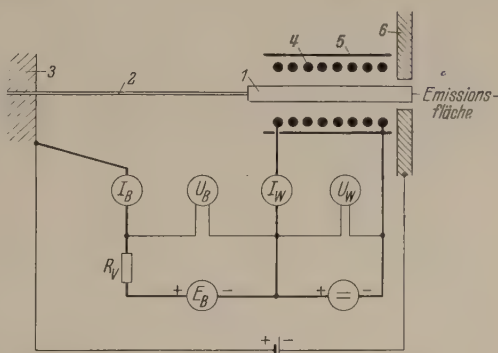


Abb. 1. Prinzipschema der Bolzenkathode. 1 Bolzen; 2 Haltestiel; 3 Bolzenhalter; 4 Heizwendel; 5 Strahlungsschutzschirm; 6 Kathodenblende.

tronenkanonen kann man dabei grundsätzlich folgende zwei Wege beschreiten:

a) Man stellt den Kathodenkörper in die Mitte einer Wolframheizwendel, die den Körper durch Strahlung aufheizt und gleichzeitig als Elektronenquelle für das Elektronenbombardement dient.

b) Als Kathodenkörper dient hier eine flache Scheibe, der gegenüber man eine Heizspirale aus Wolfram anordnet. Die Wärmezufuhr zum Kathodenkörper erfolgt wieder in geringerem Maße durch die Strahlung und zur Hauptsache durch Elektronenbombardement mit der Heizspirale als Primärkathode.

Der zweite Weg ist eher für verhältnismäßig großflächigere Kathoden geeignet und wurde bereits in einer industriellen Anwendung für die Kathode eines Hochleistungs-Klystrons besprochen [2]). Der erste Weg erscheint dagegen für sehr kleine Emissionsflächen als zweckmäßiger und wurde von uns gewählt. Das Prinzipschema einer solchen Kathode, die wir als Bolzenkathode nannten, ist in Abb. 1 dargestellt. Die Kathode besteht aus einem zylindrischen Körper 1, dem Bolzen, dessen eine Seite über einen verjüngten Stiel 2, in einem Halter 3 fest eingespannt ist und dessen freie Stirnfläche geschliffen und poliert wird und als Emissionsfläche in der Elektronenkanone dient. Um den Bolzen herum ist eine Heizspirale 4, die Wendel, angebracht. Der Strahlungsschutz- und Abschirmzylinder 5 und die Kathodenblende 6 vervollständigen die Kathodenanordnung.

Die Wendel wird durch Stromdurchgang am besten zwecks Vermeidung von magnetischen Störungen mit Gleichstrom geheizt. Der Bolzen ist durch eine Gleich-

¹ Bezüglich Strahlerzeugungssystem siehe [3]

stromquelle mit der EMK $= E_B$ über einen Widerstand R_V positiv gegenüber Wendel aufgeladen. Die von der Wendel emittierten Elektronen werden dadurch beschleunigt, bombardieren den Bolzen und heizen ihn beliebig hoch auf. Die Aufgabe des Schirmes 5 ist erstens als Strahlungsschutz zu wirken, womit

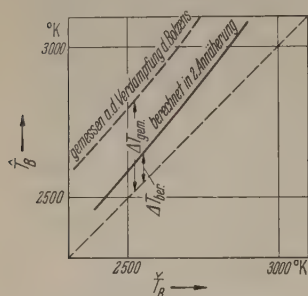


Abb. 2. Die Höchsttemperatur des Bolzens in der Mitte der Bombardierungszone \hat{T}_B in Abhängigkeit der Temperatur der Emissionsfläche \check{T}_B .

die Heizleistung gesenkt und vor allem die Temperaturverteilung im Bolzen homogenisiert wird, und zweitens vermeidet der Schirm, daß zu viel Elektronen auf die Wände der Heizkammer (die Kathodenblende) abwandern, falls diese ein positives Potential gegenüber der Wendel besitzen. Die Kathodenblende trennt den Heizraum von dem

2. Temperaturverteilung im Bolzen.

Ein für die Lebensdauer des Bolzens sehr wichtiges Problem ist die Temperaturverteilung im Bolzen. Die uns vorgeschriebene Temperatur ist die Temperatur \check{T}_B der Bolzenstirnfläche. Die Wärmezufuhr durch das

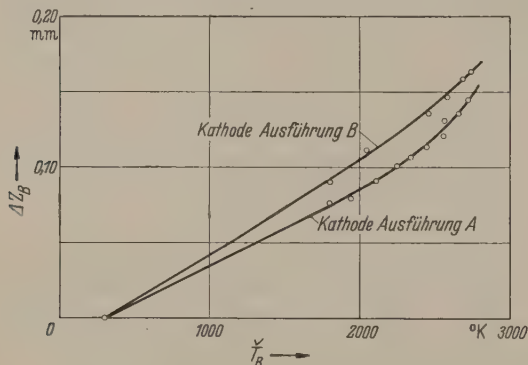


Abb. 3. Ausdehnung des Bolzens ΔZ_B in Abhängigkeit der Temperatur der Emissionsfläche. Kathode Ausführung A: Bolzendurchmesser 0,6 mm; Bolzenlänge 13 mm; Bolzenende im Klemmbacken eingespannt; — Kathode Ausführung B: Bolzendurchmesser 0,6 mm; Bolzenlänge 15 mm; Bolzenende auf den Haltestift, mit Pt verlötet.

Elektronenbombardement erfolgt in einem Bereich, der in einer konstruktiv bedingten Entfernung von der Stirnfläche liegt. Die Folge ist, dass die Wärme durch den Bolzen fließen muß, wodurch die Mitte der Bombardierungszone unter Umständen eine bedeutend höhere Temperatur \hat{T}_B erhält und die Abdampfung des Bolzens in dieser Zone die Lebensdauer des Bolzens begrenzt. An einer anderen Stelle [1] wurde versucht, diese Temperaturdifferenz $\Delta T = \hat{T}_B - \check{T}_B$ rechnerisch zu erfassen. In Abb. 2 ist die, nach der dort abgeleiteten Beziehung, berechnete Kurve $\hat{T}_B = f(\check{T}_B)$ graphisch dargestellt. Im Diagramm sind auch zwei Meßpunkte, die aus der Verdampfungsgeschwindigkeit des Bolzens an der heißesten Stelle bei den später zu besprechenden Lebensdauerversuchen errechnet wurden, eingetragen. Die Abweichung von der theoretischen

Kurve ist sehr groß. Gemessene Werte von ΔT haben rund den dreifachen Betrag von den gerechneten. Diese große Abweichung ist nicht sehr überraschend, da die theoretische Ableitung von ΔT mit der überall konstanten Temperatur als erste Näherung operierte und außerdem idealisierte Randbedingungen annahm.

Wie wir später sehen werden, kann die Temperaturverteilung im Bolzen durch Anbringen des Strahlungsschutzschirmes bedeutend homogenisiert werden. Ebenfalls einen sehr günstigen Einfluß bringt die Verminderung der Wärmeableitung der Wendel (homogene Temperaturverteilung, bzw. Verteilung des Bombardierungsstromes!) bei der später zu besprechenden konstruktiven Ausführungsvariante B.

3. Lagehaltung des Bolzens.

Ein weiterer wichtiger Faktor für das betriebssichere Arbeiten der Bolzenkathode ist die Lagehaltung des Bolzens. Aus diesem Grunde wurde die früher besprochene und angewandte Halterung des Bolzens mittels eines verjüngten Stieles [1] verlassen und der Bolzen durchgehend bis zur Einspannstelle auf gleichem Durchmesser gelassen¹. Dadurch konnte die Lagestabilität bedeutend erhöht werden, wenn man auch eine vergrößerte Bombardierungsleistung und eine erhöhte Abdampfung des Bolzens in der Bombardierungszone in Kauf nehmen mußte. Dafür ergaben sich aber noch zwei weitere Vorteile; erstens die Vereinfachung der Herstellung des Bolzens und zweitens konnte auch bei höheren Wehneltspannungen der sogenannte Pendeleffekt [1] beseitigt werden. Die erreichte Lagestabilität ist sehr gut, die Emissionsfläche verändert ihre Lage meistens während der ganzen Betriebsdauer nicht mehr als 10 μ . Dies ist für die Justierung des Elektronenstrahles von größtem Vorteil.

Neben der Möglichkeit eines seitlichen Abwanderns der Emissionsfläche, wird sich stets eine axiale Verschiebung derselben, infolge der Ausdehnung des Bolzens beim Aufheizen, einstellen. Diese Verschiebung ist aber eindeutig und kann im voraus berücksichtigt werden. In Abb. 3 ist diese Verschiebung in Funktion der Stirnflächentemperatur \check{T}_B eingetragen, wie sie sich aus einer mikroskopischen Messung ergab. Für die später zu besprechenden zwei konstruktiven Varianten der Kathodenausführung A und B, sind die Bolzenausdehnungen ΔZ_B unterschiedlich, da die Wärmeableitung in beiden Fällen verschieden ist und auch die Länge des Bolzens von der Stirnfläche bis zu der Einspannfläche bei der Ausführung A 13 mm und bei der Ausführung B 15 mm beträgt.

4. Heizcharakteristiken.

Ein drittes Problem der Bolzenkathode ist die Stabilität der Heizung. Die Ursache einer Unstabilität der Heizung des Bolzens durch das Elektronenbombardement liegt in der Rückheizung der Wendel durch die Wärmestrahlung des Bolzens. Durch die erhöhte Wendeltemperatur steigt der Bombardierungsstrom und infolgedessen auch die Bolzentemperatur, die wiederum eine Erhöhung der Rückheizung der Wendel verursacht. Auf diese Weise kann sich die

¹ Dies gilt für unsere Normalausführung mit einem Durchmesser der Emissionsfläche von 0,6 mm. Bei größerem Durchmesser z. B. von 1 mm und mehr, dürfte es besser sein, die Verjüngung wieder einzuführen.

bolzentemperatur bis zum Schmelzpunkt aufschau-
ln. Wenn auch frühere theoretische Betrachtungen
] prinzipiell das Instabilwerden der Heizung be-
schreiben konnten, stößt eine erschöpfende rechnerische
Erfassung des Heizvorganges auf sehr große
Schwierigkeiten. Wir wollen hier den Heizvorgang an-
und von Heizcharakteristiken besprechen.

In der Ausbildung der Raumladung vor der Heiz-
endel ist die Ursache zu suchen, daß es überhaupt
nen stabilen Betrieb bei höheren Bolzentemperatur-
n gibt. Dies sehen wir in Abb. 4a, wo der Bombardie-
rungsstrom I_B in Funktion des Wendel-Heizstromes
 I_W dargestellt ist. Die Kurven sind dabei so auf-
genommen (Schaltung siehe Abb. 1), daß die EMK der

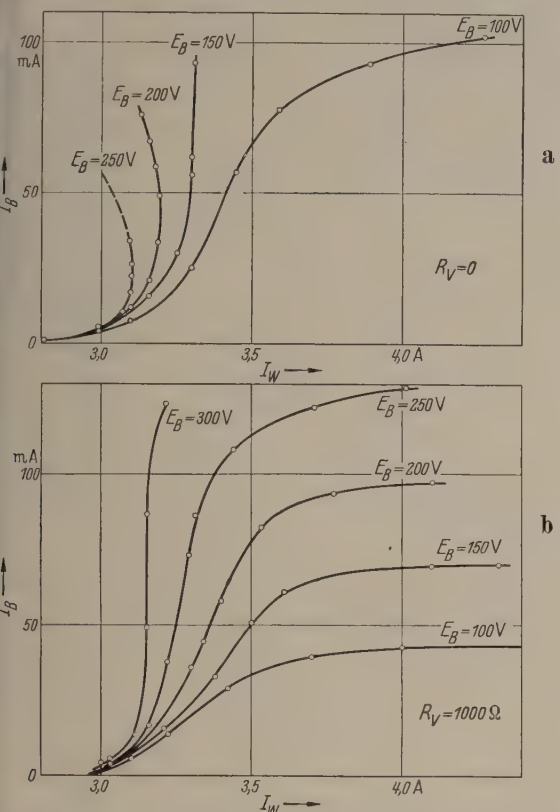


Abb. 4 a + b. $I_B - I_W$ Charakteristiken der Bolzenkathode: Kathodenausführung B. Bolzen aus Wolfram; Bolzendurchmesser 0,6 mm; Bolzenlänge 15 mm, das Ende angelötet; Wendel Nr. 3 ($d = 0,20$ mm; $D_K = 1,5$; $h = 0,30$ mm; $n = 12$); Strahlungsschutzschirm aus Molybdän; Schirmdurchmesser 4,0 mm.

Stromquelle im Bombardierungskreis E_B konstant ge-
halten wurde und im Stromkreis außer der Bombardie-
rungsstrecke kein anderer Widerstand vorhanden
war. Wie wir sehen bei $E_B = 100$ V steigt I_B zunächst
mit steigendem I_W rasch an, um nachher einem gewissen
Sättigungszustand zuzustreben, wenn die Wendel so
stark geheizt wird, daß sich vor der Wendel eine Raum-
ladung ausbildet und der Strom von der Wendel-
temperatur fast nicht mehr abhängig wird. Erhöhen
wir die Bombardierungs-EMK auf 150 V, so erhöht
sich auch der raumladungsbedingte Strom entspre-
chend der LANGMUIR'schen Gleichung $I \sim U^{3/2}$. Bei
 $E_B = 200$ V wird die Rückheizung so stark, daß die
Instabilität eintritt, bevor das Raumladungsgebiet
erreicht wird. Die Kurve $I_B = f(I_W)$ kippt um und
 I_B steigt an auch bei Kleinwerden des Wendelstromes.
Diesem ersten Wendepunkt folgt ein zweiter, wo sich
die Kurve wieder in das Raumladungsgebiet wendet.

Wenn wir nun der Bombardierungsstrecke einen
Vorwiderstand R_V vorschalten, wird sich die Raum-
ladung noch stärker auswirken, da jetzt die effektive
Bombardierungsspannung $U_B = E_B - I_B R_V$ mit
steigendem Strom I_B kleiner wird. Die Charakteristi-

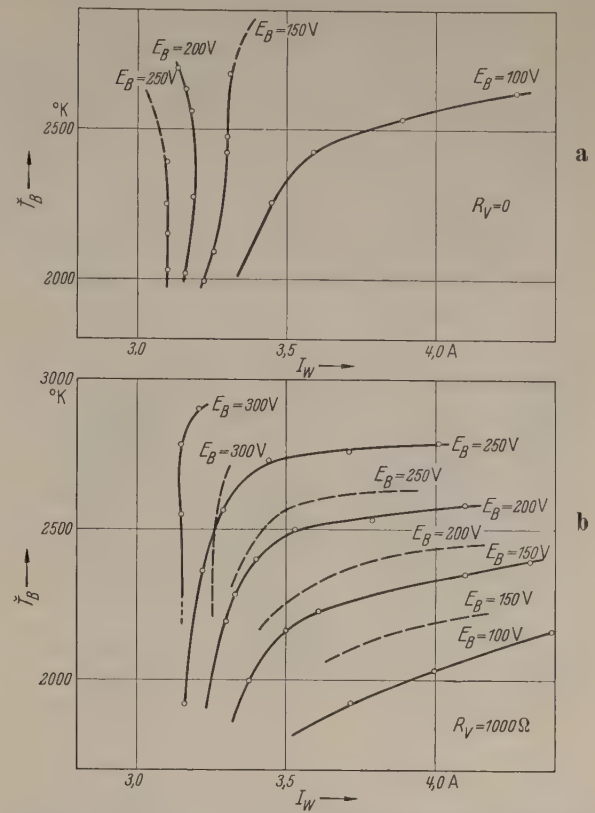


Abb. 5 a + b. $I_B - I_W$ Charakteristiken der Bolzenkathode: Kathodenausführung B. Daten wie bei Abb. 6; Gestrichelte Kurven gehören zur Ausführungsvariante A.

ken verflachen sich. Wir sehen dies in Abb. 4b. In
Abb. 5a und b sind die entsprechenden Charakteristiken
 $\tilde{T}_B = t(I_W)$ aufgezeichnet. Anhand von Abb. 4 und 5
kann nun der Heizvorgang vollständig übersehen
werden.

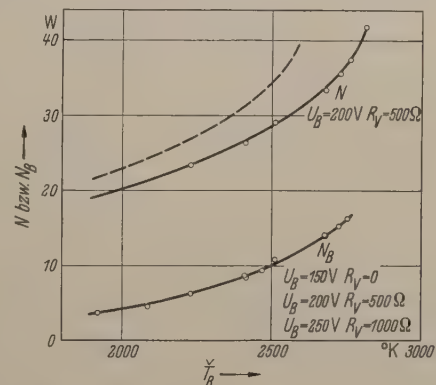


Abb. 6. Bombardierungsleistung N_B und die gesamte Heizleistung $N = N_B + N_W$ in Abhängigkeit der Temperatur der Emissionsfläche \tilde{T}_B . Kathodenausführung B; Daten wie bei Abb. 6; Gestrichelte Kurve zeigt uns die Gesamtheizleistung bei der Ausführung A.

Da der Rückheizeffekt in den Kathodenausfüh-
rungen A und B verschieden ausfällt, sind auch die
Heizcharakteristiken unterschiedlich. Die Charakte-
ristiken in Abb. 4 und 5 beziehen sich auf eine Katho-
de der Ausführung B. Zum Vergleich sind in Abb. 5b

einige Charakteristiken der Ausführung A gestrichelt eingetragen.

Die Wahl der Heizparameter E_B und R_V hängt von der Betriebstemperatur des Bolzens und von der Heizschaltung ab. Auf alle Fälle ist das instabile Gebiet zu vermeiden, womit sich bei einem durch die Schaltung vorgegebenen Vorwiderstand R_V eine obere Grenze für E_B ergibt. Wählt man das Parameterpaar „ E_B ; R_V “ so, daß die $\dot{T}_B - I_W$ Charakteristiken gerade noch nicht umkippen, so sehen wir aus Abb. 6, daß die Bolzentemperatur in einem großen Temperaturbereich durch die Bombardierungsleistung N_B gegeben wird. Die Gesamtheizleistung $N = N_B + N_W$ differiert dagegen ein wenig, da die Wendelheizleistung von der Wahl des Parameterpaares „ E_B ; R_V “ abhängig ist. Die Wendeltemperatur liegt bei Bolzentemperaturen oberhalb 2500° K, zwischen 2400 und 2500° K.

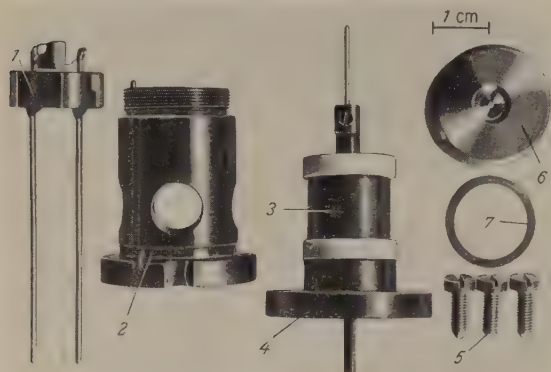


Abb. 7. Details der Kathodenpatrone mit der Bolzenkathode, Ausführung A. 1 Wendelplatine; 2 Patronenkörper; 3 Bolzenplatine; 4 Pressteller; 5 Klemmschrauben; 6 Kathoden-Blende; 7 Zwischenring.

5. Konstruktive Gestaltung der Kathodenpatrone.

Die langjährige Entwicklung hat zu den folgenden zwei bewährten Konstruktionen geführt:

Ausführung A:

Abb. 7 zeigt uns die Einzelteile dieser Ausführung. 1 ist die Wendelplatine, die die Heizwendel und den Strahlungsschutzschirm trägt. Sie wird in eine Passung auf der oberen Seite des Patronenkörpers 2 eingesetzt. 3 ist die Bolzenplatine in deren Klemmbakken der Bolzen eingespannt ist. Die Bolzenplatine wird zwischen den beiden Sinterkorundringen mit dem Teller 4 in den Patronenkörper 2 hineingepreßt. Sie kann durch die im Patronenkörper sichtbaren vier Seitenlöcher in einem Zentrierring zentriert und dann mit Hilfe des Tellers 4 und den drei Schrauben 5 festgespannt werden. Diese Zentrierung erfolgt in Hinsicht auf die exakte Zentrierung des Bolzens mit der Bohrung in der Kathodenblende 6, welche mit einer Gewinde auf den Patronenkörper 2 aufgeschraubt wird und gleichzeitig zum Festklemmen der Wendelplatine dient. Der Patronenkörper aus Kupfer hat eine kalibrierte zylindrische Führungsfläche von 20 mm Durchmesser, die in die Bohrung der Elektronenkanone genau paßt. Dadurch ist eine gute Wärmeableitung und genaue Zentrierung mit dem Strahlerzeugungssystem gewährleistet.

Ausführung B:

Der Unterschied dieser Ausführung gegenüber der Ausführung A liegt darin, daß die Wendel- und Bolzen-

Platinen zu einer einzigen Platine vereinigt wurden, wo bei der Bolzen nicht mehr eingespannt, sondern an einem Molybdän-Stäbchen wie die Wendel mit Platin angelötet wird. (Abb. 8) Die Verlotung aller drei Teile Wendel, Strahlungsschutzschirm, Bolzen erfolgt in einer speziellen Lehre, welche alle diese Teile in genauer Position zu der Platine fixiert. Es wird mit Gleichstromlichtbogen in Wasserstoff-Stickstoff-Gemisch oder in Argon gelötet. Die Molybdänstäbchen, welche den Bolzen und die Wendel tragen, werden durch eine Glas-Keramik Einsinterung mit der Kovar-Platine verbunden. Diese Einsinterung bzw. Glasverlotung erfolgt in einer Lehre im Ofen unter trockenem Stickstoff bei ca. 1000° C. Die Molybdänstäbchen sind auf diese Weise von der Platine abisoliert und wir benötigen nicht mehr die beiden Sinterkorundringe; der Kathodeneinsatz, den wir in Abb. 8 abgebildet sehen, kann direkt in den Patronenkörper 2 (Abb. 7) eingesetzt und mit dem Teller 4 gespannt werden. Die Zentrierung des Bolzens mit der Kathodenblende erfolgt wie bei der Ausführung A. Die Kathodenblende ist auch derjenigen der Ausführung A. ähnlich.

Diese Ausführung bringt uns gegenüber der Ausführung A in erster Linie zwei Vorteile; erstens wird die durch die Verdampfung in der Mitte der Bombardierungszone bedingte Lebensdauer des Bolzens beträchtlich erhöht, wie wir noch sehen werden, und zweitens, ist die Lagehaltung des Bolzens bei dieser Ausführung viel besser als bei der Ausführung A, da die Einspannung des Bolzens und damit verknüpfte Fehleinspannungen wegfallen. Daneben ist die Einfachheit der Auswechslung der Kathode und um einige Watt kleinere Heizleistung als weitere Vorteile dieser Ausführung zu nennen. Demgegenüber hat die Ausführung B zwei Nachteile; erstens müssen Bolzen und Wendel zu gleicher Zeit ausgewechselt werden. Da die Wendel im allgemeinen eine größere Lebensdauer aufweist, kann man bei der Ausführung A nur den Bolzen wechseln, der allein nicht viel kostet. Zweitens ist die axiale Lage des Bolzens gegenüber der Kathodenblende bei der Ausführung A immer auf den gewünschten Wert einstellbar, während Ausführung B Schwankungen von mehreren Hundertstel mm aufweisen kann.

Es ist nun so, daß für industrielle Anwendungen, wo die Betriebssicherheit und die Lebensdauer eine große Rolle spielen, die Ausführung B bevorzugt wird. Hingegen wird man für Laboratoriumsarbeiten auf die Ausführung A, wo nur der Bolzen auf Lager zu halten wäre, zurückgreifen.

6. Wahl des Wendel- und Bolzenmaterials.

Wie wir früher schon erwähnten, kommen als Reinmetallkathoden nur Wolfram, Tantal und Niob in Frage, wobei in der gleichen Reihenfolge die Elektronenemissions-Fähigkeit bei einer bestimmten Temperatur ansteigt aber auch die Verdampfungsgeschwindigkeit. Die Verdampfungsgeschwindigkeit von Niob ist verhältnismäßig groß, so daß Niob nur in den Fällen in Frage kommt, wo auf eine möglichst kleine Be-



Abb. 8. Kathodeneinsatz für die Kathodenpatrone Ausführung B.

riehtemperatur und Heizleistung sehr großen Wert gelegt wird. Hingegen erscheinen bezüglich Verdampfungsgeschwindigkeit Wolfram und Tantal als gleichwertig [4], [5], [6], [7]. Man wird damit verleitet annehmen, daß sich Tantal für die Bolzenkathode besser eignen würde. Nun ist es so, daß bei der Heizwendel ein wichtiger Faktor, die Formbeständigkeit im Betrieb ist. Dieser Umstand schließt die Anwendung der Tantal-Wendel aus. Auch die Wolframwendeln müssen diesbezüglich sehr sorgfältig hergestellt werden. Der Entscheid zwischen Tantal und Wolfram als Bolzenmaterial ist schwieriger, denn man kann lagebeständige Tantalbolzen herstellen. Dann sieht der Gewinn an Heizleistung bei Tantal verlockend aus, denn die Heizleistung der Bolzenkathode ist verhältnismäßig hoch und die Abfuhr der Heizwärme kann einige Schwierigkeiten bieten. Nun ist für die Lebensdauer des Bolzens nicht die Temperatur der Emissionsfläche \tilde{T}_B , sondern die höchste Temperatur \hat{T}_B in der Mitte der Bombardierungszone maßgebend. In Abb. 12 finden wir die Abdampfung eines Bolzens aus Tantal an der heißesten Stelle im Laufe der Brenndauer für eine Temperatur der Emissionsfläche von 2435°K aufgetragen. Vergleichen wir diese Kurve mit derjenigen von Wolfram bei $\tilde{T}_B = 2600^\circ\text{K}$, entsprechend gleicher Elektronenemissionsstromdichte, so stellen wir eine beträchtlich stärkere Abdampfung des Tantalbolzens fest. Die Ursache ist bei der schlechteren Wärmeleitfähigkeit des Tantals zu suchen. Tantal hat bei 2435°K eine Wärmeleitfähigkeit von $0,9\text{ W/cm}^\circ\text{K}$ und Wolfram $1,22\text{ W/cm}^\circ\text{K}$ bei 2600°K . Es kann sich dadurch ein großer Temperaturabfall im Bolzen ausbilden, wenn auch die schlechtere Leitfähigkeit des Tantals durch niedrigere spezifische Strahlung zum großen Teil kompensiert wird. Es ist auch zu bemerken, daß auch gleich großer absoluter Temperaturabfall im Bolzen bei Tantal zu einer stärkeren Verdampfung an der heißesten Stelle führen würde, da die Verdampfungskurve bei Tantal steiler ansteigt.

7. Dimensionierung der Bolzenkathode und die Technologie der Herstellung von Bolzen und Wendel.

Für die Dimensionierung der Bolzenkathode ist in erster Linie die Größe der Emissionsfläche maßgebend. Die Größe der Emissionsfläche wird im Zusammenhang mit der Strahlerzeugung festgelegt. Für sehr kleine Emissionsflächen ist es notwendig, den Bolzendurchmesser größer als den Durchmesser der Emissionsfläche zu wählen und das Ende des Bolzens so zuzuschleifen, daß die gewünschte Größe der Emissionsfläche realisiert werden kann. Je kleiner der Bolzendurchmesser, desto näher muß die Bombardierungszone an die Emissionsfläche verlegt werden, um noch erträgliche Lebensdauer des Bolzens zu gewährleisten [1]. Bei kleinerem Bolzendurchmesser ist es zweckmäßig, den Bolzen bis zur Einspannstelle auf gleichem Durchmesser zu lassen. Wenn auch die Wärmeableitung und auch die Temperatur an der heißesten Stelle größer wird, so verbessert man dadurch die Lagestabilität. Bei größerem Bolzendurchmesser dürfte es hingegen notwendig sein, auf der Länge von der Heizzone bis zur Einspannstelle den Durchmesser zu verkleinern. (Über die Berechnung der Wärmeableitung und der Eigenschwingungen des Bolzens, siehe

[1]). Bei den in diesem Bericht besprochenen Versuchen war der Bolzendurchmesser stets $0,6\text{ mm}$ und die Länge des Bolzens von der Stirnfläche bis zur Einspannstelle bei der Ausführung A 13 mm , bei der Ausführung B 15 mm .

Der Bolzen wird aus dem handelsüblichen sauber gezogenen Wolframdraht hergestellt. Der Draht muß zuerst in einer Ausglühvorrichtung geradegestreckt werden. Danach werden Stücke in richtiger Länge mit einer Diamantscheibe zugeschnitten, wobei zu beachten ist, daß der Wolfram keine Risse aufweist. Nachdem die Stirnfläche sorgfältig plangeschliffen ist, werden die Bolzen im Rekristallisationsofen nach dem unten für die Wendel beschriebenen Verfahren rekristallisiert. Zum Schluß kann die Emissionsfläche noch überpoliert werden.

Die Dimensionierung der Wendel, d. h. die Festlegung des Kerndurchmessers D_K , des Drahtdurchmessers d und der Steigung h erfolgt in erster Linie vom Standpunkt der Formbeständigkeit aus. Das Verhältnis D_K/d sollte nicht größer als 6 bis 8 sein [1]. Bei der Festlegung des Drahtdurchmessers muß man unter Umständen auf den Heizstrom Rücksicht nehmen. Der Abstand zwischen zwei Wendelwindungen soll aus Kurzschluß-Sicherheit möglichst nicht kleiner als $0,1\text{ mm}$ gewählt werden. Der Kerndurchmesser richtet sich nach dem Bolzendurchmesser, wobei der Rückheizeffekt, die Diodencharakteristik und nicht zuletzt die Kurzschluß-Sicherheit eine Rolle spielen. Wir haben in unseren Versuchen drei verschiedene Wendeltypen mit folgenden Daten angewendet.

Wendel 1: $D_K = 1,20\text{ mm}$ $d = 0,11\text{ mm}$ $D_K/d = 11$
 $h = 0,20\text{ mm}$ $n = 17$ Windungen.

Wendel 2: $D_K = 1,20\text{ mm}$ $d = 0,15\text{ mm}$ $D_K/d = 8$
 $h = 0,25\text{ mm}$ $n = 14$ Windungen.

Wendel 3: $D_K = 1,50\text{ mm}$ $d = 0,20\text{ mm}$ $D_K/d = 5,7$
 $h = 0,30\text{ mm}$ $n = 12$ Windungen.

Wendel No. 1 hat sich als nicht genug betriebssicher erwiesen. Mit Wendel No. 2 und Wendel No. 3 konnten dagegen sehr zufriedenstellende Resultate erzielt werden. Es wird z. Zt. vorwiegend die Wendel No. 3 verwendet, da sie robuster und betriebssicherer ist, wenn auch der Heizstrom um 50% höher ist und die Wendel No. 2 bezüglich der Lebensdauer des Bolzens günstiger erscheint. (Homogenere Wendeltemperatur!)

Die Herstellung der Wendel muß sehr sorgfältig durchgeführt werden. Die Rekristallisation erfolgt in einem speziellen Rekristallisationsofen, bei 3000°K . (hierzu siehe [1]).

8. Die Heizschaltung.

Bei der Besprechung von Heizcharakteristiken haben wir gesehen, daß durch geeignete Wahl der Bombardierungs EMK und des Vorschaltwiderstandes für den ganzen in Frage kommenden Temperaturbereich des Bolzens ein stabiler Betrieb möglich ist, wenn auch unter Umständen die steilen Charakteristiken die Einregulierung der Temperatur erschweren könnten. Wenn sich aber durch irgendwelche Einflüsse (Vakuumchwankungen, Veränderung des Widerstandes der Heizwendel usw.) die Emissionsfähigkeit der Wendel verändert, so ändert sich auch die Bolzentemperatur und zwar besonders stark, wenn wir den Arbeitspunkt auf der steilen Flanke der $\tilde{T}_B - I_W$ Charakteristik haben. Will man diese Schwankungen vermeiden, so

muß die Bolzentemperatur auf konstante Temperatur automatisch reguliert werden.

Aus Abb. 6 wissen wir, daß die Bolzentemperatur konstant bleibt, wenn die Bombardierungsleistung konstant gehalten wird. Setzen wir eine stabilisierte Bombardierungs EMK voraus, so führt dies auf die automatische Konstanthaltung des Bombardierungsstromes, d. h. des Emissionsstromes der Wendel. Ein ähnliches Problem liegt unter anderem z. B. bei Ionisationsmanometern, wofür auch verschiedene Regu-

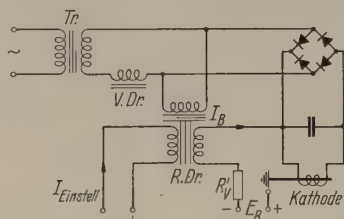


Abb. 9. Prinzipschema der Heizschaltung der Bolzenkathode mit der automatischen Konstanthaltung des Bombardierungsstromes durch eine vormagnetisierte Drossel.

lierschaltungen entwickelt worden sind. [8] [9] [10]. Die Schaltung von OVERBECK und MEYER [8] zeichnet sich durch besondere Einfachheit aus. Sie enthält als Regelorgan einen speziellen Heiztransformator mit einer Vormagnetisierungswicklung durch die der Emissionsstrom fließt. Dem Transformator ist eine Impedanz vorgeschaltet. Durch geeignete Dimensionierung ist die Blindstromaufnahme des Transformators im Arbeitsgebiet außerordentlich stark von der Vormagnetisierung abhängig gemacht worden. Man kann an Stelle des vormagnetisierten Heiztransformators einen normalen Heiztransformator nehmen und

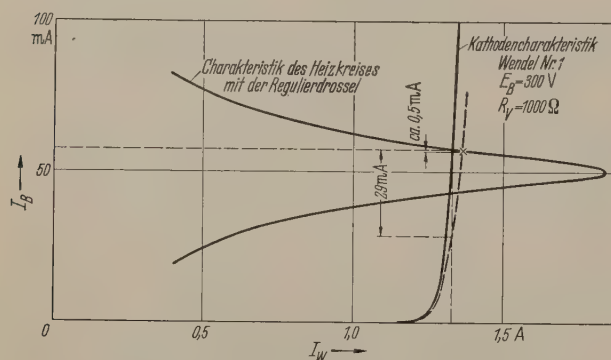


Abb. 10. Regelcharakteristiken bei der Drossel-Regulierung nach Abb. 9.

ihm eine vormagnetisierte Drossel parallel schalten, womit die Verhältnisse übersichtlicher werden. Es ergibt sich dann die in Abb. 9. dargestellte prinzipielle Schaltung. In Abb. 10 sind die Regelcharakteristiken für eine Kathode mit Wendel Nr. 1 $E_B = 300\text{ V}$, $R_V = 1000\ \Omega$ gezeichnet anhand deren die Regulierung verfolgt werden kann. Ändert sich z. B. die Charakteristik der Bombardierungsstrecke infolge verschlechterter Elektronenemission von der ausgezogenen Kurve zu der gestrichelten, so würde sich der Bombardierungsstrom für den Fall, daß nicht reguliert wird, d. h. daß der Heizstrom konstant bleibt, um 29 mA ändern. Wirkt aber die Drosselregulierung, so haben wir nur ein Regulierdefizit von 0,5 m A.

Die Einstellung des Arbeitspunktes erfolgt am zweckmäßigsten durch Anbringen einer zweiten Vormagnetisierungswicklung, die durch einen Einstell-

strom beaufschlagt wird. Eine Veränderung des Einstellstromes bedeutet eine Hebung oder Senkung der Drosselcharakteristik in Abb. 10, wodurch der Arbeitspunkt entlang der Kathodencharakteristik wandert. Die Änderung des Bombardierungsstromes ist proportional der Änderung des Einstellstromes. Die Einstellung erfolgt damit fast unabhängig von der Steilheit der Kathodencharakteristik und kann sehr fein gemacht werden. Wir haben mit der beschriebenen Regulierschaltung seit längerer Zeit gearbeitet und sie hat sich in den meisten Fällen zufriedenstellend erwiesen.

9. Lebensdauer der Bolzenkathode.

Ein wichtiger Faktor bei der Beurteilung einer Glühkathode ist die Lebensdauer. Die Bestimmung der Lebensdauer einer Glühkathode ist aber nicht immer einfach, denn erstens muß genau festgelegt werden, wann das Leben der Kathode als beendet anzusehen ist und zweitens müssen genaue Angaben über die Betriebsverhältnisse im Elektronengerät, wo die Kathode eingebaut wird, vorliegen.

Wir wollen die Lebensdauer der Bolzenkathode zunächst bei sehr guten Vakuumverhältnissen und ohne Rücksicht auf die Erzeugung des Elektronenstrahles in der Elektronenkanone nur in Abhängigkeit von der Temperatur der Emissionsfläche \tilde{T}_B betrachten. Da wir bei der Bolzenkathode eigentlich zwei Kathoden haben, die Wendel als primäre Kathode und den Bolzen als sekundäre Kathode, so wird die Lebensdauer der Bolzenkathode durch die kürzere Lebensdauer der beiden Kathoden bedingt sein. Es hat sich gezeigt, daß die Formbeständigkeit der Wendel insbesondere der Wendel Nr. 3 sehr gut ist. Man kann damit annehmen, daß das Leben der Wendel durch das Durchbrennen beendet wird. Anhand der Messungen an Wendel Nr. 1 wurde gezeigt [11], daß die Lebensdauer als beendet anzusehen ist, wenn der Wendeldraht infolge Verdampfung 15% seines Gewichtes verliert¹. Wir erhalten dann für die Berechnung der Lebensdauer folgende Formel:

$$t_0 = 0,04 \frac{\rho d}{v}$$

wobei ρ die Dichte des Drahtmaterials, d den Drahtdurchmesser, v die Verdampfungsgeschwindigkeit angibt. Nehmen wir für die Wendeltemperatur an der heißesten Stelle 2500°K an, so erhalten wir folgende Lebensdauer:

Wendel Nr. 2	$t_0 = 2480$ Stunden
Wendel Nr. 3	$t_0 = 3300$ Stunden

Für die Lebensdauer des Bolzens ist seine Lagehaltung maßgebend. Die Lagehaltung ist wiederum in erster Linie durch das Abdampfen des Bolzens in der heißesten Zone bedingt. In Abb. 11 sehen wir eine Kathode bei der der Bolzen noch einwandfrei seine Lage beibehalten hat, obgleich der Bolzendurchmesser an der heißesten Stelle \tilde{d}_B nur noch 0,15 mm betrug. Der Bolzen befand sich im Betrieb in horizon-

¹ Wir möchten hier auf zwei Fehler, die sich in der zitierten Arbeit [11] eingeschlichen haben, aufmerksam machen; erstens in der Gleichung 4 der erste Term — 15 sollte richtig — 14,85 heißen, dieselbe Korrektur muß in der Gleichung 5 erscheinen. Zweitens ist in Abb. 2 die gemessene Verdampfungsgeschwindigkeit aus Versehen zu weit nach rechts eingetragen. Auf diese Fehler wurden wir von Herrn H. TORP aufmerksam gemacht..

taler Lage. Im allgemeinen kann man sagen, daß ein Wo-Bolzen mit dem Anfangsdurchmesser $\hat{d}_B = \check{d}_B = 0,6$ mm noch betriebssicher arbeiten kann, wenn \hat{d}_B einen Wert von 0,2 mm nicht unterschreitet. In Abb. 12 ist \hat{d}_B , der Durchmesser in der Mitte der Bombardierungszone, als Funktion der Betriebszeit aufgetragen. Zuerst können wir den großen Unterschied zwischen beiden Kurven bei $\check{T}_B = 2600^\circ\text{K}$ für eine Wendel Nr. 3 mit und ohne Strahlungsschutz-Schirm feststellen. Betrachten wir das Leben des Bolzens als beendet wenn $\hat{d}_B = 0,2$ mm wird, so finden wir für den Fall ohne Strahlungsschutz eine Lebensdauer von $t_0 = 150$ Stunden und mit Strahlungsschutz eine solche von $t_0 = 340$ Stunden, also 130% größer. Diese beachtliche Steigerung der Lebensdauer ist, wie auch früher erwähnt, auf die Homogenisierung der Bolzen- (und auch der Wendel-) Temperatur zurückzuführen.

Weiterhin können wir aus Abb. 12 entnehmen, daß sich für $\check{T}_B = 2500^\circ\text{K}$ bei geradliniger Extrapkollation eine Lebensdauer von 1200 Stunden ergibt. Diese Lebensdauerwerte gelten für die Kathodenausführung A. Für die Kathodenausführung B liegt nur ein genauer Meßpunkt bei $\check{T}_B = 2600^\circ\text{K}$ vor, da hier das Ausmessen des Bolzens nur nach der Zerstörung der Kathode möglich ist. Legen wir dadurch diesen einzelnen Meßpunkt und den Anfangspunkt eine Gerade als $\check{d}_B - t$ -Charakteristik, so erhalten wir eine Lebensdauer von 580 Stunden, also eine nochmalige Lebensdauerverbesserung von 70%. Somit ist die Lebensdauer durch Einführung des Strahlungsschutzes und die Abänderung der Konstruktion auf ca. 3,8fachen Wert gesteigert worden.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Lebensdauer der Bolzenkathode bei gutem Vakuum durch die Lebensdauer des Bolzens gegeben ist. Die Lebensdauer der Wendel kann erst bei kleineren Bolzentemperaturen (z. B. $\check{T}_B = 2500^\circ\text{K}$, Kathodenausführung B) maßgebend sein. Bei $\check{T}_B = 2600^\circ\text{K}$ kann für die Kathodenausführung A eine Lebensdauer von 300 Stunden und für die Kathodenausführung B eine solche von 500 Stunden gesichert betrachtet werden¹.

In Abb. 12 sind auch zwei Verdampfungskurven des Tantalbolzens eingetragen und zwar bei einer Temperatur, die die gleiche Elektronenemission ergibt, wie bei einem Wolframbolzen. von 2600°K . Wir sehen, was auch früher gesagt wurde, daß sich Tantal als Bolzenmaterial nicht eignet.

Wenn man die Kathode im Zusammenhang mit der Strahlerzeugung betrachtet, ist es viel schwieriger eine Lebensdauer anzugeben. Das Bombardement der Emissionsfläche durch positive Ionen beschädigt dieselbe, so daß der Richtstrahlwert der Elektronenkanone bedeutend herabgesetzt wird [3]. Sogar im Falle, daß das Vakuum in der Elektronenkanone ausgezeichnet ist, entsteht im Laufe der Brennzeit eine Aufrauung der Emissionsfläche (Vakuümätzung), die

¹ Essollhier nur vermerkt werden, daß wir bei $T = 2600^\circ\text{K}$ in einer Elektronenkanone Stromdichten von ca. $1,5 \text{ A/cm}^2$ erhalten, also bedeutend höher als man nach den Sättigungsstromdichtewerten von LANGMUIR-JONES erwarten würde.

ebenfalls vermindern auf den Richtstrahlwert wirkt. Das Vorhandensein eines großen partiellen Druckes von Kohlenwasserstoffdämpfen im Rezipienten kann zu den Karburierungserscheinungen führen, die einen beträchtlichen Einfluß auf die Lebensdauer, sowohl des Bolzens wie der Wendel haben können.

Zusammenfassung

Es wird über eine für die hochbeanspruchten Elektronenkanonen entwickelte indirekt geheizte Wolframkathode berichtet. Die Kathode besteht aus einem zylindrischen Bolzen aus Wolfram, dessen Stirnfläche

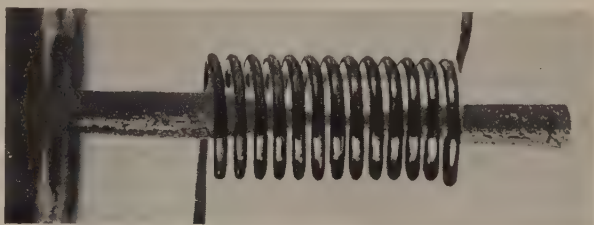


Abb. 11. Bolzenkathode nach längerer Brennzeit mit stark abgedampftem Bolzen.

plan- oder hohlgeschliffen wird und als Emissionsfläche dient. Um den Bolzen herum ist eine Heizwendel angebracht, die mit Stromdurchgang geheizt wird und als Primärkathode wirkt. Die von der Wendel emittierten Elektronen werden beschleunigt und bombardieren den Bolzen, so daß der Bolzen auf sehr hohe Temperaturen betriebssicher aufgeheizt werden

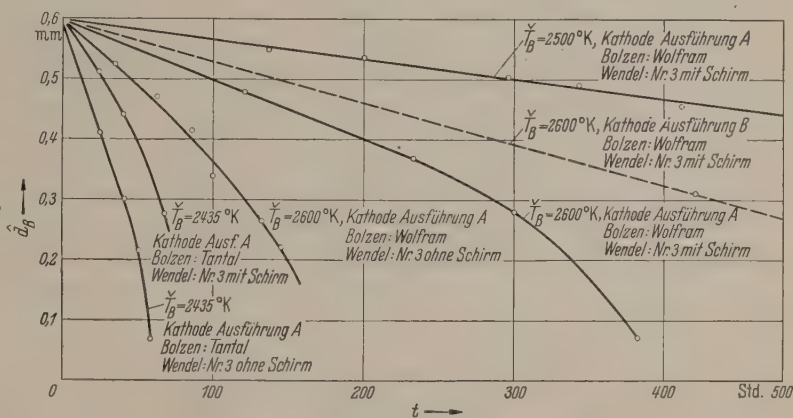


Abb. 12. Lebensdauercharakteristiken des Bolzens.

kann. Ein oder zwei Strahlungsschutzschirme und eine Kathodenblende, die den Heizraum vom Beschleunigungsfeld trennt, vervollständigen die Kathodenanordnung. Es werden verschiedene Probleme dieser Bolzenkathode, die Temperaturverteilung im Bolzen, die Lagehaltung der Emissionsfläche und die Heizcharakteristiken, besprochen. Einige seit mehreren Jahren praktisch ausprobierte konstruktive Ausführungen werden näher erläutert und die Technologie der Herstellung von Wendel und Bolzen werden eingehend behandelt. Da die Rückheizung der Wendel durch die Strahlung des Bolzens die Heizungsstabilität beeinträchtigt, muß der Heizschaltung besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Eine seit langer Zeit ausprobierte Heizschaltung mit magnetischer Stabilisierung wird besprochen. Die bisher praktisch ausgeführten Kathoden haben einen Bolzendurchmesser von 0,6 mm. Die Gesamtheizleistung bei einer Tempe-

ratur der Emissionsfläche von 2600°K ist ca. 30 w wovon 11 w auf die Bombardierungsleistung fallen. In einem letzten Abschnitt wird die Lebensdauer der Kathode näher besprochen und die Ergebnisse der Dauerversuche wiedergegeben. Bei 2600°K Kathodentemperatur beträgt die Lebensdauer des Bolzens ca. 600 Stunden, während sich die Lebensdauer der Wendel auf mehrere Tausend Stunden erstrecken kann.

Ich möchte die Gelegenheit nicht verpassen auch an dieser Stelle Herrn Prof. E. BAUMANN, Leiter des Instituts für technische Physik an der Eidgen. Technischen Hochschule für die Erlaubnis zur Veröffentlichung dieser Arbeit zu danken.

Literatur: [1] BAS, E. B.: Mitteilungen aus d. Inst. f. techn. Physik der E. T. H., Nr. 1. — [2] PREIST D. H., MURDOCK C. E. u. WOERNER I. I.: Proc. IRE, 41, 20 (1953) — [3] BAS, E. B.: Proceedings of the 2. International Conference on Electron Microscopy, London 1954 und Optik 12, ..., (1955). — [4] JONES, H. A. u. LANGMUIR, I.: Gen. electr. Rev. 30, 310, 354 u. 408 (1927). — [5] CHARDWELL, A. B.: Phys. Rev. 47, 628 (1935). — [6] ZWIKKER, C.: Diss. Amsterdam (1925) [7] — LANGMUIR, I. u. MALTER, L.: Phys. Rev. 55, 77 u. 743 (1939) [8] OVERBECK, W. P. u. MEYER, H. A.: Rev. Sci. Instrum. 5, 287 (1934). — [9] HAAG, J. B. u. N. M. SMITZ: Rev. Sci. Instrum. 7, 497 (1936). — [10] RIDENOUR, L. N. u. LAMPSON, C. W.: Rev. Sci. Instrum. 8, 162 (1937). — [11] BAS, E. B.: Z. angew. Phys. 2, 374 (1950)

Dr. Enis. B. Baß, Institut für technische Physik
der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

Berichte.

Starke Fokussierung bei Beschleunigern*.

Von Walter Dällenbach, Bern/Schweiz.

Mit 5 Textabbildungen.

(Eingegangen am 22. November 1954.)

1. Einleitung und Übersicht.

Wie beim Zyklotron werden bekanntlich auch beim Synchrotron die mit der Kreisfrequenz Ω umlaufenden Teilchen in axialer z -Richtung nur dann fokussiert — allerdings bei verminderter Fokussierung in radialer r -Richtung — wenn das axiale magnetische Führungsfeld B_z mit wachsendem r abnimmt.

$$\sigma = -(\partial B_z / \partial r) / (B_z / R)$$

ist die diese Abnahme am Ort der Kreisbahn $\{z = 0; r = R\}$ des ungestörten Teilchens kennzeichnende Zahl. Ein Maß der fokussierenden Wirkung sind die Kreisfrequenzen ω_r und ω_z der Betatronschwingungen, welche ein gestörtes Teilchen unter dem Einfluß der fokussierenden LORENTZkräfte um die Kreisbahn des ungestörten Teilchens ausführt. Wie bekannt, sind $\omega_r = \sqrt{1 - \sigma} \Omega$ und $\omega_z = \sqrt{\sigma} \Omega$. Längs dem Umfang der Kreisbahn homogene Fokussierung sowohl in r -, wie in z -Richtung verlangt also $0 < \sigma < 1$. Bei der starken Fokussierung [1] wird die Kreisbahn $\{z = 0; r = R\}$ beispielsweise in eine größere gerade Anzahl gleich langer Sektoren unterteilt mit konstantem großem positivem σ in allen geraden und konstantem großem negativem σ in allen ungeraden Sektoren. In den geraden Sektoren werden gestörte Teilchen in z fokussiert, in r dagegen defokussiert, umgekehrt in den ungeraden Sektoren. Bei gleicher Winkelabweichung der Teilchenbahn von der ungestörten Bahn kann die Amplitude der Querabweichung des Teilchens sehr viel kleiner gemacht werden, als bei homogener Fokussierung.

Zunächst wird gezeigt, daß eine beliebige Kombination fokussierender, feldfreier und defokussierender Sektoren durch eine lineare Transformation der beiden Komponenten Querabweichung q und Quergeschwindigkeit \dot{q} eines gestörten Teilchens charakterisiert werden kann [2]. Die n -malige Hintereinanderschaltung einer derartigen Kombination führt wieder auf eine lineare Transformation.

Vorausgesetzt wird dabei, daß die Zahlen σ in dem von den Teilchenbahnen bestrichenen Raum eines mathematisch exakt definierten Sektors wirklich konstant seien, also an der Grenze zwischen benachbarten Sektoren sich unstetig ändern. Vernachlässigt werden also der zufällige Einfluß stets vorhandener Inhomogenitäten des Materials und die systematischen Einflüsse der — wenn auch — schwachen Eisensättigung, des tatsächlich stetigen Übergangs von σ an der Grenze zwischen benachbarten Sektoren und endlich der Zylinderkrümmung, denn nur im ebenen Fall ist ein in einem endlichen Gebiet konstantes σ mit den MAXWELLSchen Gleichungen verträglich [3].

Eine geometrische Veranschaulichung erlaubt in einfachster Weise die Möglichkeiten zu überblicken, welche bei derartiger wiederholter Anwendung einer linearen Transformation auftreten können. Der durch $\{q, \dot{q}\}$ charakterisierte Zustandspunkt der Störung rückt nämlich mit jedem Durchlaufen einer Kombination auf einem Kegelschnitt in der Zustandsebene einen Schritt weiter vor. Die Bedingung für eine Ellipse ist zugleich die Stabilitätsbedingung der Kombination für die Störung.

Diese geometrisch anschaulich gewonnene Einsicht wird durch die Berechnung der Daten des Kegelschnittes in der Zustandsebene und des gesetzmäßigen Fortschreitens des Zustandspunktes auf letzterem bestätigt. Dabei ergeben sich außer der bereits erwähnten Bedingung für die Stabilität einer Kombination gegenüber einer Störung der Teilchenbahn die Bedingung für Periodizität der Störung und die erforderliche Apertur.

Hierauf werden als Beispiel die Koeffizienten der linearen Transformation einer Kombination berechnet, die aus einem beliebigen fokussierenden und einem beliebigen defokussierenden Sektor besteht, denen je ein feldfreier Sektor vorausgeht.

Der nächste Abschnitt ist der Untersuchung des Einflusses von Justierfehlern gewidmet. Dem Endresultat für die zu erwartenden Abweichungen in einer gestörten Teilchenbahn gegenüber einer mit gleichen

* Ein Auszug aus dieser Arbeit ist in der Z. Naturforschung 9a, 1005 (1954) erschienen.

Anfangsbedingungen gestörten Bahn einer ideal justierten Maschine liegt zugrunde, daß die N Kombinationen eines Synchrotrons zufällige starre Dejustierungen aufweisen, welche statt mit einer GAUSSschen Verteilung mit gleicher Wahrscheinlichkeit innerhalb maximal möglicher Justierfehler liegen.

Von den Richtungsfokussierungen durch elektrische Beschleunigungsfelder, welche beim Zyklotron näher untersucht worden sind [4], wird gezeigt, daß sie sich bei starker Fokussierung im Mittel aufheben. Dagegen bewirkt die durch die mit der Zunahme der Teilchenenergie koordinierte „langsame“ Zunahme des magnetischen Führungsfeldes auch bei starker Fokussierung eine adiabatische Dämpfung der Betatronschwingungen eines gestörten Teilchens.

Die Berechnung der stationären Bahn eines bezüglich Energie vom ungestörten, synchronen Teilchen abweichenden Teilchens erlaubt die Diskussion der Synchrotron- oder Phasenschwingungen bei starker Fokussierung verglichen mit diesen Störungen bei homogener Fokussierung [1].

Die Fälle nicht stabiler Betatronschwingungen, wo der Kegelschnitt als Hyperbel oder als ein Paar paralleler Geraden nicht im Endlichen der Zustandsebene bleibt, sind stets mit betrachtet worden, da ihnen für semistabile Anordnungen bei Linear- und Spiralbeschleunigern Bedeutung zukommt.

Alle Rechnungen sind elementar und bis zu unmittelbar anwendbaren Resultaten durchgeführt.

2. n -malige Wiederholung einer Kombination von fokussierenden, feldfreien und defokussierenden Sektoren.

Ist q die Querabweichung eines gestörten Teilchens von der Bahn ungestörter Teilchen, so gilt innerhalb eines Sektors mit fokussierendem Feld — den einfachsten Fall harmonischer Bindung vorausgesetzt —

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \quad (1)$$

Dafür kann gesetzt werden

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} - \omega p &= 0 \\ \dot{p} + \omega q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sind beim Eintritt des Teilchens in den Sektor $t=t_0$, $q=q_0$, $p=p_0$, beim Austritt aus ihm $t=t_1$, $q=q_1$, $p=p_1$, so verlangt (2)

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \cos u \cdot q_0 + \sin u \cdot p_0 \\ p_1 &= -\sin u \cdot q_0 + \cos u \cdot p_0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

wo $u = \omega(t_1 - t_0) = (\omega/v)(s_1 - s_0)$. Darin ist $v = s/t$ die gleichförmig vorausgesetzte Geschwindigkeit des Teilchens in seiner Bahn.

Innerhalb eines Sektors mit defokussierendem Feld gelten analog zu (1), (2), (3)

$$\ddot{q} - \omega^2 q = 0, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} q - \omega p &= 0 \\ p - \omega q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \mathfrak{C} \cos u \cdot q_0 + \mathfrak{S} \sin u \cdot p_0 \\ p_1 &= \mathfrak{S} \cos u \cdot q_0 + \mathfrak{C} \sin u \cdot p_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Endlich innerhalb eines feldfreien Sektors

$$\ddot{q} = 0, \quad (7)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} - \omega p &= 0 \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_0 + u p_0 \\ p_1 &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Schaltet man Sektoren nach (1), (4), (7), in beliebiger Kombination hintereinander, wobei u und auch ω von Sektor zu Sektor verschieden sein können und verlangt, daß in der Grenze zwischen aufeinanderfolgenden Sektoren jeweiligen q und $\dot{q} = \omega p$ stetig übergehen, so bestehen zwischen $\{q_0, p_0\}$ am Eintritt in die Kombination und $\{q_1, p_1\}$ am Austritt aus ihr analog zu (3), (6), (9), die lineare Transformation

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= a_{11} q_0 + a_{12} p_0 \\ p_1 &= a_{21} q_0 + a_{22} p_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Koeffizienten a sind wie in (3), (6), (9) durch die Geometrie der Kombination bestimmt.

Werden n identische Kombinationen hintereinander geschaltet, wird also die Transformation (10) n -mal hintereinander ausgeübt, so erhält man aus dem Vektor $\{q_0, p_0\}$ am Eintritt der n Kombinationen den Vektor $\{q_n, p_n\}$ an deren Austritt, für dessen Komponenten

$$\left. \begin{aligned} q_n &= A_{11} q_0 + A_{12} p_0 \\ p_n &= A_{21} q_0 + A_{22} p_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

geschrieben werden kann.

3. Geometrische Veranschaulichung.

Bevor die Koeffizienten A aus den Koeffizienten a und aus n berechnet werden, soll an Hand einer einfachen geometrischen Überlegung in der Zustandsebene (q, p) gezeigt werden, welche Wirkung die n -malige Wiederholung einer Kombination mit der Transformation (10) auf die Stabilität und die Periodizität der Bahn eines gestörten Teilchens hat.

Die Fläche E des durch die beiden Vektoren $\{q_0, p_0\}$ und $\{q_1, p_1\}$ in der (q, p) -Ebene aufgespannten Parallelogramms ist

$$E = \begin{vmatrix} q_0 & q_1 \\ p_0 & p_1 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Setzt man in (12) einmal (10) und dann die Umkehr von (10), nämlich

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= (a_{22} q_1 - a_{12} p_1)/D \\ p_0 &= (-a_{21} q_1 + a_{11} p_1)/D \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wo

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}, \quad (14)$$

ein, so folgt

$$\begin{aligned} E &= a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2 \\ &= [a_{21} q_1^2 + (a_{22} - a_{11}) q_1 p_1 - a_{12} p_1^2]/D. \end{aligned} \quad (15)$$

Ist die Determinante D insbesondere gleich 1, so folgt aus (15) durch Schluß von n auf $n+1$:

a) Die Spitzen der Vektoren $\{q_0, p_0\}$, $\{q_1, p_1\}$, \dots , $\{q_n, p_n\}$, \dots liegen auf einem Kegelschnitt mit der Mittelpunktsgleichung

$$q_{21} q^2 + (a_{22} - a_{11}) q p - a_{12} p^2 = E. \quad (16)$$

Achsenverhältnis und Orientierung des Kegelschnittes im Koordinatensystem hängen also nur von den Koeffizienten a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} der Transformation ab. Diese Koeffizienten definieren eine Schar konzentrischer,

koaxialer, ähnlicher Kegelschnitte, aus welcher jeweiligen einer durch den Wert des vom Startvektor $\{q_0, p_0\}$ abhängigen absoluten Gliedes E herausgehoben wird.

b) Vektoren, die in der Reihe aufeinanderfolgen, wie $\{q_{n-1}, p_{n-1}\}$ und $\{q_n, p_n\}$, spannen stets ein Parallelogramm der Fläche E auf.

Aus a) und b) ergibt sich eine einfache graphische Konstruktion: Man zeichnet in der (q, p) -Ebene zunächst den Kegelschnitt (16) und trägt in ihn den Startpunkt $\{q_0, p_0\}$ ein. Die Höhe h_0 zur Basis $\sqrt{q_0^2 + p_0^2}$ des durch $\{q_0, p_0\}$ und $\{q_1, p_1\}$ aufgespannten Parallelogrammes bestimmt sich aus

$$h_0 \sqrt{q_0^2 + p_0^2} = E.$$

Damit ist — wie Abb. 1 zeigt — $\{q_1, p_1\}$ zweideutig bestimmt. Es hängt dies damit zusammen, daß die Transformation

$$\begin{cases} q_1 = -a_{22} q_0 + a_{12} p_0 \\ p_1 = a_{21} q_0 - a_{11} p_0 \end{cases} \quad (17)$$

zur selben Beziehung (15) führt wie die Transformation (10). Das gilt auch dann, wenn $D \neq 1$. Welcher der beiden Vektoren $\{q_1, p_1\}$ der Abb. 1 der Richtige ist, kann entschieden werden, wenn die Transformation (1) numerisch vorliegt.

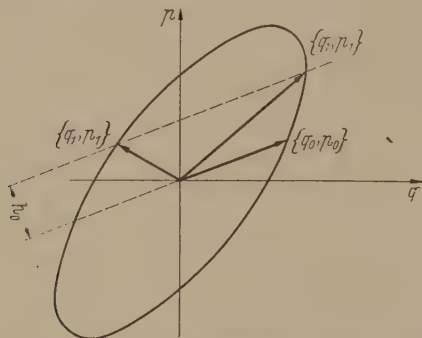


Abb. 1. Geometrische Veranschaulichung einer linearen Transformation durch einen Kegelschnitt.

Weist positives E als Vektor senkrecht zur (q, p) -Ebene nach oben, so ist h_0 derart aufzutragen, daß die Drehung von $\{q_0, p_0\}$ auf kürzestem Weg nach $\{q_1, p_1\}$ kombiniert mit der Richtung von E eine Rechtschraube ergibt.

Aus $\{q_1, p_1\}$ bestimmen sich ebenso $\{q_2, p_2\}$, $\{q_3, p_3\}$, allgemein $\{q_n, p_n\}$.

Der Kegelschnitt (16) ist eine Ellipse, oder ein Paar paralleler Geraden, oder eine Hyperbel, stets mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt, je nachdem die Diskriminante

$$\delta = -a_{21} a_{12} - \left[\frac{1}{2} (a_{22} - a_{11}) \right]^2 \gtrless 0. \quad (18)$$

Wegen $D = 1$ kann man statt (18) auch schreiben

$$\delta = 1 - \left[\frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \right]^2 \gtrless 0 \quad (19)$$

oder

$$\left[\frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \right]^2 \leq 1. \quad (20)$$

Daß für $\delta = 0$ (16) zu einem Paar paralleler Geraden degeneriert, folgt, weil in diesem Fall die linke Seite von (16) sich als Quadrat schreiben läßt.

Nur im Fall der Ellipse bleibt die Bahn des gestörten Teilchens im Endlichen, ist also stabil. Hat

außerdem der Flächeninhalt E des Parallelogrammes, welches durch aufeinander folgende Vektoren $\{q_{n-1}, p_{n-1}\}$, $\{q_n, p_n\}$ aufgespannt wird, einen Wert, bei welchem nach k Schritten $\{q_k, p_k\}$ mit dem Startvektor $\{q_0, p_0\}$ zusammenfällt, so wiederholt sich die Bahn des gestörten Teilchens nach k Schritten periodisch.

Ist $D \neq 1$, aber stets > 0 , so folgt aus (15) durch Schluß von n auf $n + 1$:

$$\begin{vmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{vmatrix} = a_{21} q_n^2 + (a_{22} - a_{11}) q_n p_n - a_{12} p_n^2 = E D^n. \quad (21)$$

Der Kegelschnitt (16) verhält sich zur Kurve, auf welcher die Spitzen der Vektoren $\{q_n, p_n\}$ nach (18) liegen, wie ein Kreis zu einer archimedischen Spirale.

$D < 1$ entspricht offenbar einer Dämpfung, $D > 1$ einer Anfachung verglichen mit der Bewegung des Massenpunktes für $D = 1$.

$D < 1$ verbessert, $D > 1$ verschlechtert die Stabilität. Transformationen mit $D \leq 0$ sind praktisch ohne Interesse, werden also nicht betrachtet.

In der Folge wird angenommen, es sei stets $D = 1$, wie dies für Transformatoren (10), welche Kombinationen der einfachen Transformationen (3), (6), (9) sind, der Fall ist.

Nach dieser mehr qualitativen Übersicht sollen nun die Koeffizienten A in (11) aus den Koeffizienten a und aus n berechnet werden.

4. Rechnerische Bestimmung.

Vektoren $\{x, y\}$ in der Zustandsebene (q, p) die, wenn sie nach (10) transformiert werden, ihre Richtung beibehalten, also in $\{\lambda x, \lambda y\}$ übergehen (Eigenvektoren), müssen den beiden homogenen Gleichungen

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = \lambda x \\ a_{21} x + a_{22} y = \lambda y \end{cases} \quad (22)$$

genügen, existieren also nur dann, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + 1 = 0 \quad (23)$$

ist. Aus (23) (Säkulargleichung) bestimmen sich zwei Werte (Eigenwerte)

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = S \pm \sqrt{S^2 - 1}. \quad (24)$$

Darin ist

$$S = \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \quad (25)$$

die halbe Spur der Determinante $D = 1$.

Mit λ_1 und λ_2 bestimmen sich aus (24) — natürlich bis auf einen willkürlichen Faktor — die zwei Eigenvektoren $\{x_1, y_1\}$ und $\{x_2, y_2\}$:

$$\left. \begin{matrix} x_1 = a_{22} - a_{12} - \lambda_1 & x_2 = a_{22} - a_{12} - \lambda_2 \\ y_1 = a_{11} - a_{21} - \lambda_1 & y_2 = a_{11} - a_{21} - \lambda_2 \end{matrix} \right\} \quad (26)$$

Das aus (26) gebildete skalare Produkt

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = (a_{12} - a_{21}) (a_{11} - a_{21} + a_{12} - a_{22})$$

zeigt, daß $\{x_1, y_1\}$ und $\{x_2, y_2\}$ wohl für $a_{12} = a_{21}$, im allgemeinen aber nicht zueinander orthogonal sind.

Betrachtet man $\{x_1, y_1\}$ und $\{x_2, y_2\}$ als die Einheitsvektoren eines schiefwinkligen Koordinationssystems,

so hat in letzterem ein beliebiger Vektor der (q, p) -Ebene die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} Q &= \begin{vmatrix} q & x_2 \\ p & y_2 \end{vmatrix} : \Delta, \\ P &= \begin{vmatrix} x_1 & q \\ y_1 & p \end{vmatrix} : \Delta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (28)$$

denn für $\{q, p\} = \{x_1, y_1\}$ folgen $Q=1, P=0$ und für $\{q, p\} = \{x_2, y_2\}$ analog $Q=0, P=1$.

Aus (27) ist umgekehrt

$$\left. \begin{aligned} q &= x_1 Q + x_2 P \\ p &= y_1 Q + y_2 P \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Transformiert sich $\{q_0, p_0\}$ vermöge (10) in $\{q_1, p_1\}$, so transformiert sich der nach (27) entsprechende Vektor $\{Q_0, P_0\}$ in $\{Q_1, P_1\}$, wobei

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \lambda_1 Q_0 \\ P_1 &= \lambda_2 P_0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

da Q_0 wie $\{x_1, y_1\}$ zum Eigenwert λ_1 und P_0 wie $\{x_2, y_2\}$ zum Eigenwert λ_2 gehörende Eigenvektoren sind.

Analog zu (11) ist also

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \lambda_1^n Q_0 \\ P_n &= \lambda_2^n P_0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Vermöge (27) erhält man daraus

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} q_n & x_2 \\ p_n & y_2 \end{vmatrix} &= \lambda_1^n \begin{vmatrix} q_0 & x_2 \\ p_0 & y_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & q_n \\ y_1 & p_n \end{vmatrix} &= \lambda_2^n \begin{vmatrix} x_1 & q_0 \\ y_1 & p_0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Aus diesen beiden linearen Gleichungen folgen

$$\left. \begin{aligned} q_n &= \left\{ \begin{vmatrix} q_0 & x_2 \\ q_0 & y_2 \end{vmatrix} x_1 \lambda_1^n + \begin{vmatrix} x_1 & q_0 \\ y_1 & p_0 \end{vmatrix} x_2 \lambda_2^n \right\} \frac{1}{\Delta} \\ p_n &= \left\{ \begin{vmatrix} q_0 & x_2 \\ p_0 & y_2 \end{vmatrix} y_1 \lambda_1^n + \begin{vmatrix} x_1 & q_0 \\ y_1 & p_0 \end{vmatrix} y_2 \lambda_2^n \right\} \frac{1}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Substituiert man darin

$$\begin{aligned} \lambda_1^n &= \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) + \frac{1}{2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ \lambda_2^n &= \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) - \frac{1}{2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} q_n &= q_0 \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) \\ &\quad + [q_0 (x_1 y_2 + x_2 y_1) / \Delta - p_0 2 x_1 x_2 / \Delta] \\ &\quad \times \frac{1}{2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ p_n &= p_0 \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) \\ &\quad + [q_0 2 y_1 y_2 / \Delta - p_0 (x_1 y_2 + x_2 y_1) / \Delta] \\ &\quad \times \frac{1}{2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Dafür werde abkürzend gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} q_n &= q_0 \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) + q_0^* \frac{1}{2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n), \\ p_n &= p_0 \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n) + p_0^* \frac{1}{2} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$\{q_0^*, p_0^*\}$ heiße der zu $\{q_0, p_0\}$ konjugierte Vektor. Er läßt sich dadurch berechnen, daß man in die eckigen Klammern in (34) $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$ und Δ aus (26) und (28) einsetzt. Bequemer führt der folgende Weg zum gleichen Resultat. Man spezialisiert (35) für $n=1$ und drückt dann $\{q_1, p_1\}$ vermöge (10) aus. Es folgt dann unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= \left[\left[a_{11} - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \right] q_0 + a_{12} p_0 \right] / \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2), \\ p_0^* &= \left[a_{21} q_0 + \left[a_{22} - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \right] p_0 \right] / \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Durch Vergleich mit den eckigen Klammern in (34) werde hier für später festgehalten:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 y_2 + x_2 y_1) / \Delta \\ &= \left[a_{11} - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \right] / \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2) \\ &= - \left[a_{22} - \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \right] / \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2), \\ 2 x_1 x_2 / \Delta &= - a_{12} / \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2) \\ 2 y_1 y_2 / \Delta &= a_{21} / \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(35) in Verbindung mit (36) muß — vorausgesetzt, daß n als stetig veränderlicher Parameter gedeutet wird — eine Parameterdarstellung des Kegelschnittes (16) sein.

Für $n=1, 2, 3, \dots$ erhält man die durch wiederholte Anwendung der Transformation (10) bestimmten Zustandsvektoren $\{q_n, p_n\}$, deren Spitzen auf dem Kegelschnitt (16) liegen.

Um dies einzusehen, werden λ_1 und λ_2 aus (24) zunächst in (35) und (36) eingesetzt, wobei die folgenden 5 Fälle zu unterscheiden sind:

I. Erster hyperbolischer Fall:

$$\left. \begin{aligned} -\infty < S = -\mathfrak{C} \mathfrak{O} \varphi < -1 \\ \infty > \varphi > 0, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\lambda_1 = -e^{-\varphi}; \quad \lambda_2 = -e^{\varphi}.$$

$$\left. \begin{aligned} q_n &= (-1)^n [q_0 \mathfrak{C} \mathfrak{O} (n\varphi) - q_0^* \mathfrak{S} \mathfrak{in} (n\varphi)], \\ p_n &= (-1)^n [p_0 \mathfrak{C} \mathfrak{O} (n\varphi) - p_0^* \mathfrak{S} \mathfrak{in} (n\varphi)], \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

wo q_0^* und p_0^* definiert sind durch

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= [(a_{11} + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \varphi) q_0 + a_{12} p_0] / \mathfrak{S} \mathfrak{in} \varphi, \\ p_0^* &= [a_{21} q_0 + (a_{22} + \mathfrak{C} \mathfrak{O} \varphi) p_0] / \mathfrak{S} \mathfrak{in} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

II. Erster linearer Fall:

$$S = -1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

$$\left. \begin{aligned} q_n &= (-1)^n (q_0 - q_0^* n), \\ p_n &= (-1)^n (p_0 - p_0^* n), \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= (a_{11} + 1) q_0 + a_{12} p_0, \\ p_0^* &= a_{21} q_0 + (a_{22} + 1) p_0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

III. Elliptischer Fall:

$$\left. \begin{aligned} -1 < S = \cos \varphi < 1 \\ 0 < \varphi < \pi \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\lambda_1 = e^{i\varphi} \quad \lambda_2 = e^{-i\varphi},$$

$$\left. \begin{aligned} q_n &= q_0 \cos(n\varphi) + q_0^* \sin(n\varphi), \\ p_n &= p_0 \cos(n\varphi) + p_0^* \sin(n\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= [(a_{11} - \cos \varphi) q_0 + a_{12} p_0] / \sin \varphi, \\ p_0^* &= [a_{21} q_0 + (a_{22} - \cos \varphi) p_0] / \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

IV. Zweiter linearer Fall:

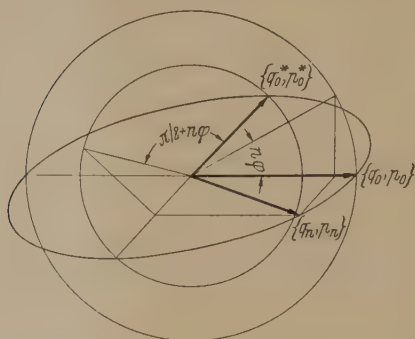
$$S = 1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} q_n &= q_0 + q_0^* n, \\ p_n &= p_0 + p_0^* n, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= (a_{11} - 1) q_0 + a_{12} p_0, \\ p_0^* &= a_{21} q_0 + (a_{22} - 1) p_0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Abb. 2. Konstruktion des Vektors $\{q_n, p_n\}$ aus konjugierten Radien $\{q_0, p_0\}$ und $\{q_0^*, p_0^*\}$ des charakteristischen Kegelschnitts.

V. Zweiter hyperbolischer Fall:

$$\left. \begin{aligned} 1 < S = \cosh \varphi < \infty \\ 0 < \varphi < \infty \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\lambda_1 = e^\varphi \quad \lambda_2 = e^{-\varphi}$$

$$\left. \begin{aligned} q_n &= q_0 \cosh(n\varphi) + q_0^* \sinh(n\varphi), \\ p_n &= p_0 \cosh(n\varphi) + p_0^* \sinh(n\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= [(a_{11} - \cosh \varphi) q_0 + a_{12} p_0] / \sinh \varphi, \\ p_0^* &= [a_{21} q_0 + (a_{22} - \cosh \varphi) p_0] / \sinh \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

In den beiden hyperbolischen Fällen I und V haben q_0^*, p_0^* nach (40) bzw. (50) gleiche Bedeutung wie in (36). Im elliptischen Fall III werden q_0^*, p_0^* nach (36) rein imaginär. In (45) sind unter q_0^*, p_0^* die durch i dividierten reellen Größen zu verstehen.

Die beiden linearen Fälle II und IV erhält man durch Grenzübergang aus dem benachbarten hyperbolischen oder elliptischen Fall. q_0^*, p_0^* nach (36) werden dabei ∞ . Deswegen bedeuten q_0^*, p_0^* in (42) und (47) die Grenzwerte, denen nach (36) $q_0^* \sin \varphi$, $p_0^* \sin \varphi$ für $\varphi \rightarrow 0$ oder $\varphi \rightarrow \pi$, bzw. $q_0^* \cosh \varphi$, $p_0^* \sinh \varphi$ für $\varphi \rightarrow 0$ zustreben.

Die Koeffizienten der Transformationen (40), (42), (45), (47), (50) haben die Spur null und die Determinante -1 in den beiden hyperbolischen, $+1$ im elliptischen und 0 in den beiden linearen Fällen.

(44) ist, falls n, q_n, p_n stetig veränderlich gedeutet werden, die Parameterdarstellung einer Ellipse aus konjugierten Radien $\{q_0, p_0\}$ und $\{q_0^*, p_0^*\}$. Die Abb. 2 zeigt, wie der Vektor $\{q_n, p_n\}$ für beliebiges n aus den konjugierten Radien konstruiert werden kann. (39) und (49) sind entsprechende Parameterdarstellungen einer Hyperbel. (41) und (46) sind die Darstellungen der Geraden, zu denen Ellipse bzw. Hyperbel degenerieren. Die Zweideutigkeit wie bei der einfachen graphischen Konstruktion nach Abb. 1 besteht hier nicht mehr.

Eliminiert man aus diesen Gleichungen den Parameter und beachtet die Bedeutung von q_0^*, p_0^*, φ , so muß man schließlich wieder die Mittelpunktsgleichung (16) erhalten. Einfacher ist, bereits die beiden Gleichungen (32) miteinander zu multiplizieren. Wegen $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ folgt

$$\left| \begin{array}{cc} x_1 q_n & q_n x_2 \\ y_1 p_n & p_n y_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} x_1 q_0 & q_0 x_2 \\ y_1 p_0 & p_0 y_2 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} q_0^* x_2 & x_2 p_n^* \\ p_0^* y_2 & y_2 p_n^* \end{array} \right| \quad (51)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_1 y_2 q_n^2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) q_n p_n + x_1 x_2 p_n^2 \\ = y_1 y_2 q_0^2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) q_0 p_0 + x_1 x_2 p_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Beachtet man (37) und die Bedeutung von λ_1 und λ_2 nach (24), (25), so folgt daraus unmittelbar (16).

Bevor die Gleichung (16) im Einzelnen diskutiert wird, soll die anschauliche Bedeutung des Parameters n gezeigt werden.

Ändert n um dn , so geht der Vektor $\{q_n, p_n\}$ über in $\{q_n + dq_n, p_n + dp_n\}$ und überstreicht dabei ein Dreieck der Fläche

$$dF = \frac{1}{2} (q_n dp_n - p_n dq_n). \quad (53)$$

Nach (33) ist

$$\left. \begin{aligned} dq_n &= \left\{ \left| \begin{array}{cc} q_0 x_2 & x_1 \lambda_1^n \ln \lambda_1 + \left| \begin{array}{cc} x_1 q_0 & q_0 x_2 \\ y_1 p_0 & p_0 y_2 \end{array} \right| x_2 \lambda_2^n \ln \lambda_2 \end{array} \right\} dn / \Delta, \\ dp_n &= \left\{ \left| \begin{array}{cc} q_0 x_2 & y_1 \lambda_1^n \ln \lambda_1 + \left| \begin{array}{cc} x_1 q_0 & q_0 x_2 \\ y_1 p_0 & p_0 y_2 \end{array} \right| y_2 \lambda_2^n \ln \lambda_2 \end{array} \right\} dn / \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Mit (33) und (54) und wegen $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ folgt

$$dF = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} x_1 q_0 & q_0 x_2 \\ y_1 p_0 & p_0 y_2 \end{array} \right| \ln(\lambda_2 / \lambda_1) dn / \Delta.$$

Wegen (37), (15), (24), (25), läßt sich dafür schreiben

$$dF = \frac{1}{2} E [\ln(\lambda_1 / \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)] dn. \quad (55)$$

Für die oben unterschiedenen fünf Fälle wird

$$\left. \begin{aligned} \text{I hyperbolisch} & \quad dF = -(E/2) dn (\varphi / \sinh \varphi), \\ \text{II linear} & \quad dF = -(E/2) dn, \\ \text{III elliptisch} & \quad dF = (E/2) dn (\varphi / \sin \varphi), \\ \text{IV linear} & \quad dF = (E/2) dn, \\ \text{V hyperbolisch} & \quad dF = (E/2) dn (\varphi / \cosh \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die Fläche ΔF des bei einer endlichen Änderung Δn von n durch den Vektor $\{q_n, p_n\}$ überstrichenen Sektors des Kegelschnitts (16) ist Δn proportional.

Ist insbesondere $\Delta n = 1$, so ist in den beiden linearen Fällen die Fläche des überstrichenen Sektors $\pm E/2$, also die Hälfte der Fläche E des durch zwei Vektoren, die durch einmalige Anwendung der Transformation (10) auseinander hervorgehen, aufgespannten

Parallelogramms, wie es nach den Betrachtungen am Anfang sein muß. Im elliptischen Fall ist wegen $p/\sin \varphi > 1$, in den hyperbolischen Fällen wegen $p/\sin \varphi < 1$ die Fläche des Kegelschnittsektors größer bzw. kleiner als $E/2$, in Übereinstimmung damit, daß vom Mittelpunkt aus ein Ellipsenbogen stets konkav, ein Hyperbelbogen stets konvex ist.

Zur Diskussion der Kegelschnittsgleichung (16) wird diese durch die Drehung

$$\left. \begin{aligned} q &= \xi \cos \chi - \eta \sin \chi \\ p &= \xi \sin \chi + \eta \cos \chi \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

auf Hauptachsen transformiert.

Dabei soll stets $0 \leq \chi < \pi/2$ (58)

sein. (57) in (16) eingesetzt und verlangt, daß der Koeffizient von $\xi \eta$ verschwinde, liefert

$$\operatorname{tg}(2\chi) = (a_{22} - a_{11})/(a_{12} + a_{21}). \quad (59)$$

Damit ist χ eindeutig bestimmt. Für (16) erhält man nach Übergang auf 2χ in den Kreisfunktionen

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2} [a_{21} - a_{12} + (a_{22} - a_{11}) \sin(2\chi)] \xi^2, \\ &+ \frac{1}{2} [a_{21} - a_{12} - (a_{22} - a_{11}) \sin(2\chi)] \eta^2 = E. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Es sind

$$\left. \begin{aligned} \sin(2\chi) &= \operatorname{tg}(2\chi)/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\chi)}, \\ \cos(2\chi) &= 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\chi)}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Wegen (58) muß stets $\sin(2\chi) \leq 0$ sein. Der Wurzel ist also das Vorzeichen von $\operatorname{tg}(2\chi)$ zu erteilen. Damit hat — was verlangt werden muß — auch $\cos(2\chi)$ das Vorzeichen von $\operatorname{tg}(2\chi)$. Zunächst mal angenommen $\operatorname{tg}(2\chi)$ nach (59) sei positiv, erhält man nach Einsetzen von (59) in (61) und dies in (60)

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2} [a_{21} - a_{12} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2}] \xi^2 \\ &+ \frac{1}{2} [a_{21} - a_{12} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2}] \eta^2 = E. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Festgehalten zu werden verdient: die Wurzel und damit die Quadrate der Halbachsen des Kegelschnitts sind stets reell. Addiert man zum Radikanden der Wurzel

$$4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - 1) = 0,$$

so kann für diesen auch geschrieben werden

$$(a_{21} - a_{12})^2 + (a_{11} + a_{22})^2 - 4 = (a_{21} - a_{12})^2 - 4\delta,$$

wo δ in Übereinstimmung mit (19) die Diskriminante des Kegelschnittes ist.

Bringt man (62) auf die Form

$$(\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 = 1,$$

so erhält man für die Quadrate der Halbachsen des Kegelschnitts

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \left\{ \frac{1}{2} (a_{21} - a_{12}) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{2} (a_{21} - a_{12}) \right]^2 - \delta} \right\} E/\delta, \\ b^2 &= \left\{ \frac{1}{2} (a_{21} - a_{12}) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} (a_{21} - a_{12}) \right]^2 - \delta} \right\} E/\delta. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Es gilt das obere oder untere Vorzeichen der Wurzel, je nachdem

$$\operatorname{tg}(2\chi) \gtrless 0.$$

Für $\delta = \sin^2 \varphi > 0$ (Ellipse) hat E in der ganzen (q, p) -Ebene ein und dasselbe Vorzeichen. Setzt man in (15) für $\{q_0, p_0\}$ speziell $\{1, 0\}$ und $\{0, 1\}$ so folgt, daß a_{21} und $-a_{12}$ stets das gleiche Vorzeichen wie E haben müssen. a^2 und b^2 in (63) sind also beide positiv.

Für $\delta = 0$ (Paar paralleler Geraden) ist das eine Halbachsenquadrat ∞ , das andere ist stets positiv und gleich $E/(a_{21} - a_{12})$.

Für $\delta = -\sin^2 \varphi < 0$ (Hyperbel) haben a^2 und b^2 verschiedenes Vorzeichen. Aus der Gleichung (18) folgt, daß solange $\delta \geq 0$ notwendigerweise $-a_{21}a_{12} > 0$ sein muß.

5. Stabilität, erforderliche Apertur, Periodizität.

Die hyperbolischen und linearen Fälle mögen für Linear- und Spiralbeschleuniger Bedeutung erlangen, bei denen wegen der relativ geringen Anzahl von Beschleunigungen gestörte Bahnen zugelassen werden können, die gegenüber Betatronschwingungen semistabil sind.

Beim Synchrotron müssen die Teilchenbahnen gegenüber Betatronschwingungen stabil sein, also der elliptische Fall, entsprechend der notwendigen und hinreichenden Stabilitätsbedingung

$$S^2 = \left[\frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) \right]^2 < 1.$$

Maßgeblich für die erforderliche Apertur einer zur starken Fokussierung von Teilchenbahnen dienenden Anordnung ist die überhaupt größte Querabweichung q_{\max} , welche in einer stabilen Bahn auftreten kann. Bei einer Kombination, welche — wie vorausgesetzt — aus fokussierenden, feldfreien und defokussierenden Sektoren besteht, muß dieses q_{\max} notwendiger Weise innerhalb eines fokussierenden Sektors auftreten, denn nur innerhalb eines fokussierenden Sektors ist $\tilde{q}/q < 0$, was zusammen mit $\dot{q} = 0$ Bedingung ist für eine maximale Elongation q_{\max} einer in q und \dot{q} stetigen Bahnkurve.

Die Zusammenfassung der einzelnen Sektoren zu der sich periodisch wiederholenden Kombination erfolge so, daß die fokussierenden Sektoren am Eintritt oder Austritt der Kombination liegen. Innerhalb der fokussierenden Sektoren gilt der Energiesatz

$$q^2 + p^2 = q_n^2 + p_n^2.$$

Darin ist $\{q_n, p_n\}$ wie bisher der Zustandsvektor an die Grenze zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kombinationen. In einem Punkte maximaler Elongation muß $p = 0$ und $q = q_{\max}$ sein. Eine obere Grenze für q_{\max}^2 ist also der größte Wert, den $q_n^2 + p_n^2$ annehmen kann. Das ist offenbar das durch (63) bestimmte Quadrat der großen Halbachse der Ellipse in der Zustandsebene. Damit ist auch klar, welchen Einfluß die Startbedingungen $\{q_0, p_0\}$ auf die für die erforderliche Apertur maßgebliche maximale Elongation q_{\max} haben.

Da im elliptischen Fall entsprechend (43) $0 < \varphi < \pi$ ist, kann mit beliebiger Näherung $\varphi = (z/M)\pi$ gesetzt werden, worin Z und M zueinander teilerfremde ganze Zahlen seien und $Z < M$. Durchläuft n die Reihe 1,

2, 3, ..., so wird $n\varphi$ in (44) erstmals ein ganzes Vielfaches von 2π für $n = M$, falls Z gerade, und für $n = 2M$, falls Z ungerade. Für solches n liefert (44) $q_n = q_0$ und $p_n = p_0$. Die Bahn schließt sich also und wiederholt sich von da an periodisch in Form einer Schwebung zwischen einer maximalen und einer minimalen Amplitude.

6. Beispiel.

Als Beispiel soll eine sich periodisch wiederholende Kombination Abb. 3 bestehend aus einem fokussierenden und einem defokussierenden Sektor, denen je ein feldfreier Sektor vorausgeht, betrachtet werden. Für diese vier Sektoren seien die Breiten u_{0f} , u_f , u_{0d} , u_d und die zugehörigen ω -Werte ω_0 , ω_f , ω_0 , ω_d . Der Umstand, daß in den beiden feldfreien Sektoren ω übereinstimmend zu ω_0 angenommen ist, bedeutet keine Spezialisierung. Beim Eintritt in u_{0f} sei der Zu-

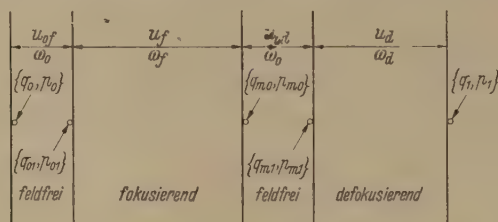


Abb. 3. Sich periodisch wiederholende Kombination eines fokussierenden und eines defokussierenden Sektors, denen je ein feldfreier Sektor vorausgeht.

stands-Vektor $\{q_0, p_0\}$. Dann ist nach (9) beim Austritt aus u_{0f}

$$\begin{aligned} q_{01} &= q_0 + u_{0f} p_0, \\ p_{01} &= p_0. \end{aligned} \quad (64)$$

Analog gelte nach (9) für den zweiten feldfreien Sektor der Breite u_{0d}

$$\begin{aligned} q_{m1} &= q_{m0} + u_{0d} p_{m0}, \\ p_{m1} &= p_{m0}. \end{aligned} \quad (65)$$

Da q und $\dot{q} = \omega p$ an den Sektorengrenzen stetig übergehen, ist der Zustandsvektor am Eintritt in den fokussierenden Sektor $\{q_{01}, (\omega_0/\omega_f) p_{01}\}$ und an dessen Austritt $\{q_{m0}, (\omega_0/\omega_f) p_{m0}\}$. Diese beiden Vektoren sind nach (3) miteinander verknüpft durch

$$\begin{aligned} q_{m0} &= \cos u_f \cdot q_{01} + \sin u_f \cdot (\omega_0/\omega_f) p_{01}, \\ (\omega_0/\omega_f) p_{m0} &= -\sin u_f \cdot q_{01} + \cos u_f \cdot (\omega_0/\omega_f) p_{01}. \end{aligned}$$

Dafür kann auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} q_{m0} &= \cos u_f \cdot q_{01} + (\omega_0/\omega_f) \sin u_f \cdot p_{01}, \\ p_{m0} &= -(\omega_f/\omega_0) \sin u_f \cdot q_{01} + \cos u_f \cdot p_{01}. \end{aligned} \quad (66)$$

Bedeutet $\{q_1, p_1\}$ den Zustandsvektor beim Eintritt in den auf den fokussierenden Sektor folgenden feldfreien Sektor, so ist analog zu (66) jedoch nach (6)

$$\begin{aligned} q_1 &= \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} u_d \cdot q_{m1} + (\omega_0/\omega_d) \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} u_d \cdot p_{m1}, \\ p_1 &= (\omega_0/\omega_d) \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} u_d \cdot q_{m1} + \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} u_d \cdot p_{m1}. \end{aligned} \quad (67)$$

Die Determinanten der vier Transformationen (64), (65), (66), (67) sind alle 1, also ist es auch die Determinante der resultierenden Transformation wie (10),

wobei man durch Ausrechnen findet

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} - (\omega_f/\omega_d) \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad - u_{0d} (\omega_f/\omega_0) \sin \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f}, \\ a_{12} &= (\omega_0/\omega_f) \sin \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} + (\omega_0/\omega_d) \cos \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad + (u_{0f} + u_{0d}) \cos \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} \\ &\quad - u_{0f} (\omega_f/\omega_d) \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad - u_{0f} u_{0d} (\omega_f/\omega_0) \sin \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f}, \\ a_{21} &= (\omega_d/\omega_0) \cos \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} - (\omega_f/\omega_0) \sin \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} \\ &\quad - u_{0d} (\omega_f \omega_d/\omega_0^2) \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n}, \\ a_{22} &= \cos \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} + (\omega_d/\omega_f) \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad + (u_{0f} + u_{0d}) (\omega_d/\omega_0) \cos \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad - u_{0f} (\omega_f/\omega_0) \sin \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} \\ &\quad - u_{0f} u_{0d} (\omega_f \omega_d/\omega_0^2) \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n}. \end{aligned} \quad (68)$$

Die Argumente u_f in den Kreisfunktionen und u_d in den Hyperbelfunktionen sind, um die Darstellung zu vereinfachen, weggelassen.

Aus (68) folgt die für die Stabilität maßgebende halbe Spur

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{22}) = \cos \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f} + \frac{1}{2} [(\omega_d/\omega_f) \\ &\quad - (\omega_f/\omega_d)] \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad + \frac{1}{2} (u_{0f} + u_{0d}) [(\omega_d/\omega_0) \cos \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n} \\ &\quad - (\omega_f/\omega_0) \sin \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{f}] \\ &\quad - \frac{1}{2} u_{0f} u_{0d} (\omega_f \omega_d/\omega_0^2) \sin \mathcal{S}\mathcal{I}\mathcal{n}. \end{aligned} \quad (69)$$

Setzt man in (69) $u_{0f} = 0$ und $u_{0d} = 0$, so ist $|S| < 1$ die in [1] angegebene Stabilitätsbedingung.

Bei festgehaltener Länge $s_1 - s_0$ der Sektoren und festgehaltener Teilchenmasse m und Teilchengeschwindigkeit v ist S nur noch Funktion der räumlichen Gradienten der magnetischen Führungsfelder in den fokussierenden und den defokussierenden Sektoren, also nur noch Funktionen von ω_f und ω_d , zu denen u_f und u_d proportional sind. Trägt man in ein (ω_f, ω_d) -Achsenkreuz die beiden Kurven $S = +1$ und $S = -1$ entsprechend (69) ein, so liegt zwischen diesen der (ω_f, ω_d) -Bereich von beispielsweise in radialer Richtung gestörten stabilen Bahnen eines Synchrotrons. Für in axialer Richtung gestörte Bahnen gilt eine zu (69) analoge Beziehung. Da ein in radialer Richtung mit ω_f^2 fokussierender Sektor in axialer Richtung mit $-(\omega_f^2 - \Omega^2)$ defokussiert, wo Ω die Kreisfrequenz eines vollen Umlaufs ist, erhält man die Stabilitätsbedingung für in axialer Richtung gestörte Bahnen eines Synchrotrons, wenn man in (69) ω_f^2 durch $-(\omega_f^2 - \Omega^2)$ und ω_d^2 durch $-(\omega_d^2 - \Omega^2)$ ersetzt. Mit diesem neuen $S = \pm 1$ erhält man im (ω_f, ω_d) -Achsenkreuz einen zweiten Bereich, welcher mit dem ersten ein Gebiet gemeinsam hat, innerhalb welchem gestörte Bahnen sowohl in radialer, wie in axialer Richtung stabil sind.

Das vorliegende Beispiel, insbesondere die Ausdrücke (68) und (69) sind ohne weiteres auch für Spiral- und Linearbeschleuniger anwendbar. Für Linearbeschleuniger ist speziell $\Omega^2 = 0$.

7. Einfluß von Justierfehlern.

In Abb. 4 seien M das Zentrum und EMA die Ebene der ungestörten Teilchenbahn eines ideal justierten Synchrotrons mit N Kombinationen vom Zentriwinkel $\vartheta = 2\pi/N$. Das ungestörte Teilchen trete bei E in Richtung $z_0 \perp EM$ und im Abstand $R = EM$ von M in eine dieser N Kombinationen ein und bei A in Richtung $z_1 \perp AM$ und wieder im Abstand $R = AM$ von M aus ihr aus.

Der im Grundriß über $\sphericalangle EMA = \vartheta$ befindlichen Kombination werde relativ zum rechtwinkligen Koordinatensystem (E, x_0, y_0, z_0) durch eine kleine Translation $\{\xi, \eta, \zeta\}$ und durch eine kleine Drehung $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ eine starre Verrückung in eine dejustierte Lage erteilt. $\{\xi, \eta, \zeta\}$ und $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ sind die 6 Justierfehler, welche eine solche Dejustierung der Kombination als Ganzes kennzeichnen. Welches ist deren Einfluß auf die Teilchenbahnen?

Würden die Koordinatensysteme (E, x_0, y_0, z_0) am Eingang und (A, x_1, y_1, z_1) am Ausgang der Kombination die Dejustierung der Kombination mitmachen, so kämen sie in die neuen Lagen (E', x'_0, y'_0, z'_0) bzw. (A', x'_1, y'_1, z'_1) . Ein Punkt $\{x_0, y_0, z_0\}$ in (E, x_0, y_0, z_0) hat in (E', x'_0, y'_0, z'_0) die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= x_0 + \gamma y_0 - \beta z_0 - \xi, \\ y'_0 &= -\gamma x_0 + y_0 + \alpha z_0 - \eta, \\ z'_0 &= \beta x_0 - \alpha y_0 + z_0 - \zeta \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

und in (A, x_1, y_1, z_1)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos \vartheta + z_0 \sin \vartheta - R(1 - \cos \vartheta), \\ y_1 &= y_0, \\ z_1 &= -x_0 \sin \vartheta + z_0 \cos \vartheta - R \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Dieselben Beziehungen (71) gelten auch für gestrichene Koordinaten, da (A', x'_1, y'_1, z'_1) relativ zu (E', x'_0, y'_0, z'_0) dieselbe Lage hat wie (A, x_1, y_1, z_1) zu (E, x_0, y_0, z_0) . Also

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x'_0 \cos \vartheta + z'_0 \sin \vartheta - R(1 - \cos \vartheta), \\ y'_1 &= y'_0, \\ z'_1 &= -x'_0 \sin \vartheta + z'_0 \cos \vartheta - R \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Setzt man x_0, y_0, z_0 aus (71) in (70) ein und die damit erhaltenen Ausdrücke für x'_0, y'_0, z'_0 in (72) ein, so resultieren die zu (70) analogen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - [\alpha \sin \vartheta - \gamma \cos \vartheta] y_1 - \beta z_1 \\ &\quad - \beta \sin \vartheta \cdot R - \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \\ y'_1 &= [\alpha \sin \vartheta - \gamma \cos \vartheta] x_1 + y_1 \\ &\quad + [\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta] z_1 \\ &\quad + [\alpha \sin \vartheta + \gamma(1 - \cos \vartheta)] R - \eta, \\ z'_1 &= \beta x_1 - [\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta] y_1 + z_1 \\ &\quad + \beta(1 - \cos \vartheta) R + \xi \sin \vartheta - \zeta \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Für achsennahe Bahnen, bei denen x_0, y_0, x_1, y_1 klein bleiben, sollen Produkte dieser Koordinaten mit den Justierfehlern α, β, γ in (70) und (73) vernachlässigbar klein sein. (70) und (73) vereinfachen sich daher zu

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= x_0 - \beta z_0 - \xi, \\ y'_0 &= y_0 + \alpha z_0 - \eta, \\ z'_0 &= z_0 - \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 - \beta z_1 - \beta \sin \vartheta \cdot R - \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \\ y'_1 &= y_1 + [\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta] z_1 \\ &\quad + [\alpha \sin \vartheta + \gamma(1 - \cos \vartheta)] R - \eta, \\ z'_1 &= z_1 + \beta(1 - \cos \vartheta) R + \xi \sin \vartheta \\ &\quad - \zeta \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Eine achsennahe Bahn, welche die Ebene $z_0 = 0$ mit den Zustandsvektoren $\{q_{0r}, p_{0r}\}$ in radialer und $\{q_{0a}, p_{0a}\}$ in axialer Richtung passiert, wird im Koordinatensystem (E, x_0, y_0, z_0) in der Nähe von E festgelegt durch das Gleichungspaar

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= q_{0r} + (\omega_r/v) p_{0r} z_0, \\ y_0 &= q_{0a} + (\omega_a/v) p_{0a} z_0. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Darin sind entsprechend jeweiligen der ersten Gleichung von (2), (5) und (8)

$$\omega_r p_{0r} = \dot{q}_{0r} \quad \text{und} \quad \omega_a p_{0a} = \dot{q}_{0a}$$

die Quergeschwindigkeit in radialer bzw. axialer Richtung und v die Bahngeschwindigkeit des Teilchens.

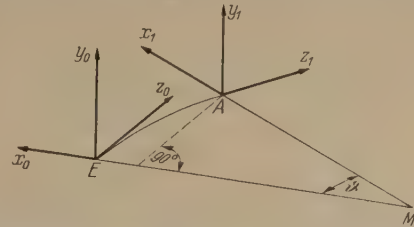


Abb. 4. Koordinatensysteme am Eintritt und am Austritt der Bahn des ungestörten Teilchens in die sich periodisch wiederholende Kombination eines idealjustierten Synchrotrons.

Dieselbe achsennahe Bahn wie (73) wird im Koordinatensystem (E', x'_0, y'_0, z'_0) und in der Nähe von E' und E festgelegt durch

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= q'_{0r} + (\omega_r/v) p'_{0r} z'_0, \\ y'_0 &= q'_{0a} + (\omega_a/v) p'_{0a} z'_0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Darin sind $\{q'_{0r}, p'_{0r}\}$ und $\{q'_{0a}, p'_{0a}\}$ die Zustandsvektoren in radialer bzw. axialer Richtung, mit welchen die Bahn die Ebene $z'_0 = 0$ passiert. Führt man x'_0, y'_0, z'_0 aus (74) in (77) ein und vernachlässigt man wieder Terme zweiter Ordnung wie $-(\omega/v) p'_{0r} \zeta$, so folgen durch Vergleich mit (77)

$$\left. \begin{aligned} q'_{0r} &= q_{0r} - \xi, \\ p'_{0r} &= p_{0r} - \beta v / \omega_r, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} q'_{0a} &= q_{0a} - \eta, \\ p'_{0a} &= p_{0a} + \alpha v / \omega_a. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

(78) und (79) drücken die Zustandsvektoren am Eintritt in die dejustierte Kombination aus durch die Zustandsvektoren am Eintritt in die ideal justierte Kombination und durch die Justierfehler, von denen allerdings nur ξ, η, α, β in (75) und (76) eingehen. Diese Interpretation von (78) und (79) ist jedoch nur erlaubt, wenn die Grenzen zwischen benachbarten Kombinationen mitten durch feldfreie Sektoren gelegt sind, was praktisch immer möglich ist, so daß jede Kombination mit einem feldfreien Sektor beginnt und einem feldfreien Sektor endet, und wenn ferner die Justierfehler $\{\xi, \eta, \zeta\}$ und $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ so klein sind, daß die fokussierenden und die defokussierenden Sektoren, also

die magnetischen Führungsfelder sich auch nach dem Dejustieren noch vollständig innerhalb der Grenzen der Kombination vor dem Dejustieren befinden.

Dieselben Überlegungen am Austritt des Teilchens aus der betrachteten Kombination führen zu den (78) und (79) analogen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} q'_{1r} &= q_{1r} - \beta \sin \vartheta \cdot R - \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \\ p'_{1r} &= p_{1r} - \beta v/\omega_r, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

$$\left. \begin{aligned} q'_{1a} &= q_{1a} + [\alpha \sin \vartheta + \gamma (1 - \cos \vartheta)] R - \eta, \\ p'_{1a} &= p_{1a} + [\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta] v/\omega_a. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Zwischen den gestrichenen Größen am Eintritt und am Austritt der dejustierten Kombination gelten lineare Transformationen (10), also

$$\left. \begin{aligned} q'_{1a} &= a_{11} q_{0a} + a_{12} p_{0a}, \\ p'_{1a} &= a_{21} q_{0a} + a_{22} p_{0a}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\left. \begin{aligned} q'_{1r} &= r_{11} q_{0r} + r_{12} p_{0r}, \\ p'_{1r} &= r_{21} q_{0r} + r_{22} p_{0r}. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Führt man vermöge (78), (79), (80), (81) die ungestrichenen Größen ein, so erhält man für diese die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} q_{1r} - \beta R \sin \vartheta - \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta \\ &= r_{11} (q_{0r} - \xi) + r_{12} (p_{0r} - \beta v/\omega_r), \\ p_{1r} - \beta v/\omega_r \\ &= r_{21} (q_{0r} - \xi) + r_{22} (p_{0r} - \beta v/\omega_r), \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} q_{1a} + [\alpha \sin \vartheta + \gamma (1 - \cos \vartheta)] R - \eta \\ &= a_{11} (q_{0a} - \eta) + a_{12} (p_{0a} + \alpha v/\omega_a), \\ p_{1a} + [\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta] v/\omega_a \\ &= a_{21} (q_{0a} - \eta) + a_{22} (p_{0a} + \alpha v/\omega_a). \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Beispielsweise die erste Gleichung (84) kann man auch schreiben

$$q_{1r} - r_{11} q_{0r} - r_{12} p_{0r} = \beta R \sin \vartheta + \xi \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta - r_{11} \xi - r_{12} \beta v/\omega_r. \quad (86)$$

q_{1r} ist die Komponente des Zustandsvektors und zwar in der Austrittsebene $z_1 = 0$ vor der Dejustierung nach Austritt des Teilchens aus der dejustierten Kombination. Nach (86) setzt sich die Änderung, welche q_{1r} in Folge des Dejustierens erfährt, aus zwei Anteilen zusammen, nämlich aus

$$\begin{aligned} \Delta q_{1r} &= \beta R \sin \vartheta + \xi \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta \\ \text{und aus} \quad &- r_{11} \xi - r_{12} \beta v/\omega_r. \end{aligned}$$

Der letztere Anteil kann aufgefaßt werden als Folge von Änderungen in q_{0r} und p_{0r} , nämlich $\Delta q_{0r} = -\xi$ und $\Delta p_{0r} = -\beta v/\omega_r$. Mit gleicher Überlegung für die übrigen Gleichungen von (84) und (85) kann man feststellen: Die Wirkung des Dejustierens ist äquivalent spontanen Änderungen der Zustandsvektoren sowohl am Eingang wie am Ausgang der dejustierten Kombination, die gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{0r} &= -\xi, \\ \Delta p_{0r} &= -\beta v/\omega_r, \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{0a} &= -\eta, \\ \Delta p_{0a} &= \alpha v/\omega_a, \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

sowie

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{1r} &= \beta R \sin \vartheta + \xi \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta, \\ \Delta p_{1r} &= \beta v/\omega_r, \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta q_{1a} &= -\alpha \sin \vartheta + \gamma (1 - \cos \vartheta) R + \eta, \\ \Delta p_{1a} &= -\alpha \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta v/\omega_a. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Erteilt man nun sämtlichen N Kombinationen Dejustierungen, welche durch Indices 1 bis N gekennzeichnet seien, so betragen nach (87) bis (90) die Zuwächse der Zustandsvektoren am Ausgang aus der n -ten Kombination

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_{nr} &= \beta_n R \sin \vartheta + \xi_n \cos \vartheta + \zeta_n \sin \vartheta - \zeta_{n+1}, \\ \Delta P_{nr} &= \beta_n v/\omega_r - \beta_{n+1} v/\omega_r. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_{na} &= -[\alpha_n \sin \vartheta \\ &\quad + \gamma_n (1 - \cos \vartheta)] R + \eta_n - \eta_{n+1} \\ \Delta P_{na} &= -[\alpha_n \cos \vartheta \\ &\quad + \gamma_n \sin \vartheta] v/\omega_a + \alpha_{n+1} v/\omega_a. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Wären die 6 N Justierfehler $\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}$, $\{\alpha_n, \beta_n, \gamma_n\}$ bekannt, so ließen sich aus (91) und (92) die Zuwächse der vier Komponenten der Zustandsvektoren je am Ausgang der insgesamt N Kombinationen berechnen.

Die auf die N Kombinationen verteilten Zuwächse nach (91) und (92) können vermöge (44) in ihrer Wirkung pro ein Umlauf ersetzt werden durch Zuwächse $\{\Delta Q_r, \Delta P_r\}$ und $\{\Delta Q_a, \Delta P_a\}$ am Ende beispielsweise der N -ten Kombination:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_r &= \sum_{n=1}^N [\Delta Q_{nr} \cos (N-n) \varphi_r \\ &\quad + \Delta Q_{nr}^* \sin (N-n) \varphi_r] \\ \Delta P_r &= \sum_{n=1}^N [\Delta P_{nr} \cos (N-n) \varphi_r \\ &\quad + \Delta P_{nr}^* \sin (N-n) \varphi_r], \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

analog für $\{\Delta Q_a, \Delta P_a\}$.

Wegen (45) kann für (93) auch geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_r &= \sum_{n=1}^N \left[\Delta Q_{nr} [\cos (N-n) \varphi_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{11} - \cos \varphi_r}{\sin \varphi_r} \sin (N-n) \varphi_r] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \Delta P_{nr} \frac{r_{12}}{\sin \varphi_r} (\sin N - n) \varphi_r, \right. \\ \Delta P_r &= \sum_{n=1}^N \Delta P_{nr} \left[\cos (N-n) \varphi_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_{22} - \cos \varphi_r}{\sin \varphi_r} \sin (N-n) \varphi_r] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N \Delta Q_{nr} \frac{r_{21}}{\sin \varphi_r} \sin (N-n) \varphi_r. \right] \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Analog für $\{\Delta Q_a, \Delta P_a\}$. An Stelle von φ in (45) treten hier φ_r und φ_a für die radiale bzw. die axiale Richtung.

Diese resultierenden Zuwächse pro ein Umlauf nach (94) der Zustandsvektoren lassen sich ohne Zweifel durch geeignete justierende Wahl der Justierfehler einzelner Kombinationen verkleinern. Darauf soll später eingegangen werden.

Statt dessen werde angenommen, die 6 N Justierfehler seien unabhängig voneinander nach bekannten

erteilfunktionen zufällig verteilt. Die ΔQ_r , ΔP_r , Q_a , ΔP_a sind nach (94) und (91), (92) lineare homogene Funktionen der 6 N Justierfehler.

Ist $Ax + By + Cz + \dots$ eine lineare homogene Funktion der Größen x, y, z, \dots , welche nach beliebigen Verteilfunktionen Schwankungen unterworfen sind, so folgt für deren Mittelwert

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + \dots &= A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} + \dots \\ \text{und für das Quadrat ihres quadratischen Mittelwertes} \\ \overline{(Ax + By + Cz + \dots)^2} &= A^2 \cdot \bar{x}^2 + B^2 \cdot \bar{y}^2 + C^2 \cdot \bar{z}^2 + \dots \\ &\quad + 2AB\bar{x}\bar{y} + 2BC\bar{y}\bar{z} + 2CA\bar{z}\bar{x} + \dots \end{aligned} \quad (95)$$

Vorausgesetzt, daß die Mittelwerte der 6 N Justierfehler alle null sind, folgt, daß auch die Mittelwerte

$$\overline{\Delta Q_r}, \overline{\Delta P_r}, \overline{\Delta Q_a}, \overline{\Delta P_a}$$

verschwinden und also in (95) die sämtlichen Doppelprodukte. (95) zeigt, wie

$$\overline{(\Delta Q_r)^2}, \overline{(\Delta P_r)^2}, \overline{(\Delta Q_a)^2}, \overline{(\Delta P_a)^2}$$

zu berechnen sind, was nun am Beispiel der Komponente ΔQ_r durchgeführt werden soll.

Der erste Schritt ist (91) in (94) einzusetzen und ΔQ_r nach den darin vorkommenden Justierfehlern ξ_n, ζ_n zu ordnen. Man findet:

$$\Delta Q_r = \sum_{n=1}^N \{E_{nq} \xi_n + B_{nq} \beta_n + Z_{nq} \zeta_n\} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} E_{nq} &= \cos \vartheta \{ \cos (N-n) \varphi_r \\ &\quad + [(r_{11} - \cos \varphi_r) / \sin \varphi_r] \sin (N-n) \varphi_r \} \\ &\quad - \{ \cos (N-n+1) \varphi_r \\ &\quad + [(r_{11} - \cos \varphi_r) / \sin \varphi_r] \\ &\quad \times \sin (N-n+1) \varphi_r \} , \\ B_{nq} &= R \sin \vartheta \{ \cos (N-n) \varphi_r \\ &\quad + [(r_{11} - \cos \varphi_r) / \sin \varphi_r] \sin (N-n) \varphi_r \} \\ &\quad \times (v/\omega_r) (r_{12} / \sin \varphi_r) \{ \sin (N-n) \varphi_r \\ &\quad - \sin (N-n+1) \varphi_r \} , \\ Z_{nq} &= \sin \vartheta \{ \cos (N-n) \varphi_r \\ &\quad + [(r_{11} - \cos \varphi_r) / \sin \varphi_r] \sin (N-n) \varphi_r \} . \end{aligned} \quad (97)$$

Das Quadrat der mittleren absoluten Schwankung $\bar{\xi}_n^2$ der N Justierfehler ξ_n ist unabhängig von n und soll mit $\bar{\xi}^2$ bezeichnet werden. Analog sind $\bar{\beta}^2$ und $\bar{\zeta}^2$ definiert. Mit diesen Bezeichnungen folgt aus (96) das nach (95) gebildete Quadrat der mittleren absoluten Schwankung von ΔQ_r und analog auch von $\Delta P_r, \Delta Q_a$ und ΔP_a zu

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta Q_r)^2} &= \bar{\xi}^2 \sum_{n=1}^N E_{nq}^2 + \bar{\beta}^2 \sum_{n=1}^N B_{nq}^2 + \bar{\zeta}^2 \sum_{n=1}^N Z_{nq}^2 , \\ \overline{(\Delta P_r)^2} &= \bar{\xi}^2 \sum_{n=1}^N E_{np}^2 + \bar{\beta}^2 \sum_{n=1}^N B_{np}^2 + \bar{\zeta}^2 \sum_{n=1}^N Z_{np}^2 , \\ \overline{(\Delta Q_a)^2} &= \bar{\alpha}^2 \sum_{n=1}^N A_{nq}^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{n=1}^N H_{nq}^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{n=1}^N I_{nq}^2 , \\ \overline{(\Delta P_a)^2} &= \bar{\alpha}^2 \sum_{n=1}^N A_{np}^2 + \bar{\eta}^2 \sum_{n=1}^N H_{np}^2 + \bar{\gamma}^2 \sum_{n=1}^N I_{np}^2 . \end{aligned} \quad (98)$$

Für die zwölf $\sum_{n=1}^N$ in (98) lassen sich geschlossene Ausdrücke ausrechnen, die hier angegeben werden sollen für den Sonderfall, daß $N \gg 1$:

$$\begin{aligned} \sum E_{nq}^2 &= (N/2) [-r_{12} / \sin^2 \varphi_r] r_{21} \\ &\quad \times [1 - 2 \cos \vartheta \cos \varphi_r + \cos^2 \vartheta] , \\ \sum B_{nq}^2 &= (N/2) [-r_{12} / \sin^2 \varphi_r] \{ r_{21} (R \sin \vartheta)^2 \\ &\quad + [(r_{22} - r_{11}) (1 - \cos \varphi_r) + 2 \sin^2 \varphi_r] \\ &\quad \times R \sin \vartheta \cdot v/\omega_r - r_{12} 2 (1 - \cos \varphi_r) \\ &\quad \times (v/\omega_r)^2 \} , \\ \sum Z_{nq}^2 &= (N/2) [-r_{12} / \sin^2 \varphi_r] r_{21} \sin^2 \vartheta , \end{aligned} \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \sum E_{np}^2 &= (N/2) [r_{21} / \sin^2 \varphi_r] r_{21} \\ &\quad \times [1 - 2 \cos \vartheta \cos \varphi_r + \cos^2 \vartheta] , \\ \sum B_{np}^2 &= (N/2) [r_{21} / \sin^2 \varphi_r] \{ r_{21} (R \sin \vartheta)^2 \\ &\quad + [(r_{22} - r_{11}) (1 - \cos \varphi_r) + 2 \sin^2 \varphi_r] \\ &\quad \times R \sin \vartheta \cdot v/\omega_r - r_{12} 2 (1 - \cos \varphi_r) \\ &\quad \times (v/\omega_r)^2 \} , \\ \sum Z_{np}^2 &= (N/2) [r_{21} / \sin^2 \varphi_r] r_{21} \sin^2 \vartheta ; \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \sum A_{nq}^2 &= (N/2) [-a_{12} / \sin^2 \varphi_a] \{ a_{21} (R \sin \vartheta)^2 \\ &\quad + [(a_{22} - a_{11}) (\cos \vartheta - \cos \varphi_a) \\ &\quad + 2 \sin^2 \varphi_a] R \sin \vartheta \cdot v/\omega_a - a_{12} \\ &\quad \times [1 - 2 \cos \vartheta \cos \varphi_a + \cos^2 \vartheta] \\ &\quad \times (v/\omega_a)^2 \} , \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \sum H_{nq}^2 &= (N/2) [-a_{12} / \sin^2 \varphi_a] a_{21} 2 (1 - \cos \varphi_a) , \\ \sum I_{nq}^2 &= (N/2) [-a_{12} / \sin^2 \varphi_a] \{ a_{21} [R (1 - \cos \vartheta)]^2 \\ &\quad + (a_{22} - a_{11}) R (1 - \cos \vartheta) \\ &\quad \times (v/\omega_a) \sin \vartheta - a_{12} [(v/\omega_a) \sin \vartheta]^2 \} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum A_{np}^2 &= (N/2) [a_{21} / \sin^2 \varphi_a] \{ a_{21} (R \sin \vartheta)^2 \\ &\quad + [(a_{22} - a_{11}) (\cos \vartheta - \cos \varphi_a) \\ &\quad + 2 \sin^2 \varphi_a] R \sin \vartheta \cdot v/\omega_a - a_{12} \\ &\quad \times [1 - 2 \cos \vartheta \cos \varphi_a + \cos^2 \vartheta] \\ &\quad \times (v/\omega_a)^2 \} , \end{aligned} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \sum H_{np}^2 &= (N/2) [a_{21} / \sin^2 \varphi_a] a_{21} 2 (1 - \cos \varphi_a) , \\ \sum I_{np}^2 &= (N/2) [a_{21} / \sin^2 \varphi_a] \{ a_{21} [R (1 - \cos \vartheta)]^2 \\ &\quad + (a_{22} - a_{11}) R (1 - \cos \vartheta) (v/\omega_a) \\ &\quad \times \sin \vartheta - a_{12} [(v/\omega_a) \sin \vartheta]^2 \} . \end{aligned}$$

(99) und (101) mit dem Index q unterscheiden sich von den entsprechenden Ausdrücken (100) und (102) mit dem Index p nur durch Faktor $-a_{12}$ an Stelle von a_{21} .

Beim Herleiten von (99) bis (102) treten, was nach (97) klar ist, beispielsweise Reihen auf wie

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \cos^2 (N-n) \varphi_r &= N/2 + (1/4) \\ &\quad \times \{ 1 - \cos 2N\varphi_r + [\sin 2\varphi_r / (1 - \cos 2\varphi_r)] \\ &\quad \times \sin 2N\varphi_r \} , \\ \sum_{n=1}^N \sin^2 (N-n) \varphi_r &= N/2 - (1/4) \\ &\quad \times \{ 1 - \cos 2N\varphi_r + [\sin 2\varphi_r / (1 - \cos 2\varphi_r)] \\ &\quad \times \sin 2N\varphi_r \} , \end{aligned} \quad (103)$$

welche durch

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N \cos^2(N-n)\varphi_r + \sum_{n=1}^N \sin^2(N-n)\varphi_r &= N, \\ \sum_{n=1}^N \cos^2(N-n)\varphi_r - \sum_{n=1}^N \sin^2(N-n)\varphi_r & \\ &= \sum_{n=1}^N \cos 2(N-n)\varphi_r. \end{aligned} \right\} (104)$$

und Übergang auf die Exponentialfunktion auf eine geometrische Reihe führen und leicht bewiesen werden können.

Ferner ist, um (99) bis (102) zu erhalten, öfter von der Identität

$$1 + [(a_{11} - \cos \varphi)/\sin \varphi]^2 = 1 + [(a_{21} - \cos \varphi)/\sin \varphi]^2 = -a_{12} a_{21}/\sin^2 \varphi$$

Gebrauch zu machen.

(98) soll nun am Beispiel (68), (69) diskutiert werden. Es handle sich insbesondere um eine Kombination ohne feldfreie Sektoren, also mit $u_{0f} = u_{0d} = 0$; ferner seien fokussierender und defokussierender Sektor von gleicher Breite $u_f = u_d = u$ und von gleicher Frequenz bezüglich Betatronschwingungen, also

$$\omega_a = \omega_r = \omega_d = \omega_f = \sqrt{\sigma} \Omega,$$

wo Ω die Umlauffrequenz multipliziert mit 2π und $\sigma = (\partial B/\partial r)/(B/R)$ die für die Inhomogenität des magnetischen Führungsfeldes charakteristische Zahl. Aus (68) und (69) folgt dann für die Mitte des Stabilitätsbereiches $\cos \varphi_r = 0$, $\cos \varphi_a = 0$, also $u = \pi/2$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -a_{22} = -\sin(\pi/2) = -2,301, \\ a_{12} &= -a_{21} = \cos(\pi/2) = 2,509. \end{aligned} \right\} (105)$$

Ferner ist für eine Kombination ohne feldfreie Sektoren und mit in der Frequenz $\omega_r = \omega_a$ der Betatronschwingungen und der Breite u übereinstimmenden fokussierenden und defokussierenden Sektoren die Bahn des ungestörten Teilchens ein Kreis vom Radius R und also $v/\omega_a = v/\omega_r = R/\sqrt{\sigma}$. Damit vereinfachen sich (99) bis (102) zu

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathcal{E}_{nq}^2 &= \sum \mathcal{E}_{np}^2 = (N/2) \overline{2,509^2} (1 + \cos^2 \vartheta), \\ \sum B_{nq}^2 &= \sum B_{np}^2 = (N/2) R^2 [\overline{2,509^2} \sin^2 \vartheta \\ &\quad - 2 \cdot 2,509 (1 + 2,301) \sin \vartheta \cdot 1/\sqrt{\sigma} \\ &\quad + 2 \cdot \overline{2,509^2} \cdot 1/\sigma], \end{aligned} \right\} (106)$$

$$\sum Z_{nq}^2 = \sum Z_{np}^2 = (N/2) \overline{2,509^2} \sin^2 \vartheta$$

und

$$\left. \begin{aligned} \sum A_{nq}^2 &= \sum A_{np}^2 = (N/2) R^2 [\overline{2,509^2} \sin^2 \vartheta \\ &\quad - 2 \cdot 2,509 (1 + 2,301 \cos \vartheta) \sin \vartheta \\ &\quad \times 1/\sqrt{\sigma} + \overline{2,509^2} (1 + \cos^2 \vartheta) 1/\sigma], \\ \sum H_{nq}^2 &= \sum H_{np}^2 = (N/2) 2 \cdot \overline{2,509^2}, \\ \sum \Gamma_{nq}^2 &= \sum \Gamma_{np}^2 = (N/2) R^2 [\overline{2,509^2} (1 - \cos \vartheta) \\ &\quad - 2 \cdot 2,509 \cdot 2,301 (1 - \cos \vartheta) \sin \vartheta \\ &\quad \times 1/\sqrt{\sigma} + \overline{2,509^2} \sin^2 \vartheta \cdot 1/\sigma]. \end{aligned} \right\} (107)$$

Macht man bezüglich der Quadrate der mittleren absoluten Schwankung der $6N$ Justierfehler die plausible Annahme

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} \quad \text{und} \quad \overline{\alpha^2} = \overline{\beta^2} = \overline{\gamma^2} = \overline{\xi^2}/(R\vartheta)^2, \quad (108)$$

so folgen aus (98) mit (106) und (107)

$$\left. \begin{aligned} (\overline{\Delta Q_r})^2 &= (\overline{\Delta P_r})^2 = \overline{2,509^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta/\vartheta^2 \right. \\ &\quad \left. - [(1 + 2,301)/2,509] \sin \vartheta/\vartheta^2 \sqrt{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + 1/\vartheta^2 \sigma \right\} \overline{\xi^2} N, \end{aligned} \right\} (109)$$

$$\left. \begin{aligned} (\overline{\Delta Q_a})^2 &= (\overline{\Delta P_a})^2 = \overline{2,509^2} \left\{ 1 + (1 - \cos \vartheta)/\vartheta^2 \right. \\ &\quad \left. - [(1 + 2,301)/2,509] \sin \vartheta/\vartheta^2 \sqrt{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + 1/\vartheta^2 \sigma \right\} \overline{\xi^2} N. \end{aligned} \right\}$$

Setzt man darin $\sin \vartheta \sim \vartheta$, so resultiert

$$\left. \begin{aligned} (\overline{\Delta Q_r})^2 &= (\overline{\Delta P_r})^2 = (\overline{\Delta Q_a})^2 = (\overline{\Delta P_a})^2 \\ &= \overline{2,509^2} [1,500 - 1,315/\vartheta \sqrt{\sigma} + 1/\vartheta^2 \sigma] \overline{\xi^2} N. \end{aligned} \right\} (110)$$

Für $\vartheta^2 \sigma$ kann man auch schreiben:

$$\vartheta^2 \sigma = [\partial(1/\varrho)/\partial r] \tilde{\varepsilon}^2 / \sqrt{E^2 - 1}. \quad (111)$$

Darin bedeuten $\tilde{\varepsilon} = R\vartheta$ die periphere Länge einer Kombination, $\varrho = mc/eB$ eine in Verbindung mit dem Teilchen der Ruhmasse m und der Ladung e für das Magnetfeld B charakteristische Länge und

$$E = 1 + eU/mc^2$$

die spezifische Energie (Verhältnis der Energie zur Ruhenergie) des Teilchens mit der Voltgeschwindigkeit U .

(111) läßt erkennen, daß (110) ohne weiteres auch für Linearbeschleuniger anwendbar ist.

Bei dem in [1] angegebenen Beispiel eines Synchrotrons für 30 BeV -Protonen sind $\vartheta = 2\pi/120$ und $\sigma = 3600$, also $\vartheta^2 \sigma = \pi^2$. Dies in (110) eingesetzt, liefert

$$\sqrt{(\overline{\Delta Q_r})^2} = 2,73 \sqrt{\overline{\xi^2}} \sqrt{N}. \quad (112)$$

Für die Justierfehler $\xi_1 \dots \xi_N$ der N Kombinationen eine GAUSSsche Verteilung anzunehmen, bei welcher, wenn auch entsprechend selten, beliebig große Fehler vorkommen können, dürfte den wirklichen Verhältnissen nicht entsprechen. Zutreffender scheint, daß jeder der N Justierfehler $\xi_1 \dots \xi_N$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit W innerhalb der maximal möglichen Abweichungen $-\xi_0$ und $+\xi_0$ liegt. Bei solcher Verteilung sind $W = \frac{1}{2} \xi_0$ und $\overline{\xi^2} = \xi_0^2/3$. Damit wird aus (112)

$$\sqrt{(\overline{\Delta Q_r})^2} = 1,58 \xi_0 \sqrt{N}. \quad (113)$$

Zur Interpretation von (113) dürfte angezeigt sein, die Voraussetzungen dieses Resultates zu rekapitulieren.

Deutet man die $6N$ Justierfehler $\xi_1 \dots \xi_N$, $\eta_1 \dots \eta_N$, $\zeta_1 \dots \zeta_N$, $\alpha_1 \dots \alpha_N$, $\beta_1 \dots \beta_N$, $\gamma_1 \dots \gamma_N$ als Komponenten eines Vektors J in einem $6N$ -dimensionalen Raum, so gehört zu jeder individuellen Verwirklichung einer Maschinentype mit N Kombinationen ein und nur ein Vektor J , dessen Spitze nach Voraussetzung mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo innerhalb des $6N$ -dimensionalen Würfels mit Zentrum im Ursprung und Kanten der Länge $2\xi_0$ parallel den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt. Für einen bestimmten Vektor J ergeben sich aus (94) ganz bestimmte für die zu J gehörende Maschine feste Zuwächse $\{\Delta Q_r, \Delta P_r\}$ und $\{\Delta Q_a, \Delta P_a\}$ pro ein Umlauf des Zustandsvektors in radialer bzw. in axialer Richtung. Durch den Zufall bestimmt ist allein der durch den Vektor J repräsentierte individuelle Satz von $6N$

Justierfehlern, dagegen sind die Abweichungen der Teilchenbahn pro ein Umlauf durch J nach (94) streng determiniert. ΔQ_r und ΔP_r sind lineare homogene Funktionen der $\xi_1 \dots \xi_N$, $\beta_1 \dots \beta_N$, $\zeta_1 \dots \zeta_N$, analog ΔQ_a und ΔP_a der $\alpha_1 \dots \alpha_N$, $\eta_1 \dots \eta_N$, $\gamma_1 \dots \gamma_N$. Deswegen ist grundsätzlich möglich für jede individuelle Verwirklichung einer Maschinentype mit N Kombinationen etwa an der N -ten Kombination ξ_N und ζ_N derart nachjustierend zu wählen, daß $\Delta Q_r = 0$ und $\Delta P_r = 0$ werden. Ebenso können durch nachjustierende Wahl etwa von α_N und γ_N auch die Zuwächse ΔQ_a und ΔP_a grundsätzlich zum Verschwinden gebracht werden, während die übrigen $6N - 4$ Justierfehler durch den Zufall bestimmte Werte haben sollen. Sieht man von derartigem praktisch bedeutsamem Nachjustieren einzelner Kombinationen ab und überläßt die $6N$ Justierfehler innerhalb des Würfels der Kantenlänge $2\xi_0$ dem Zufall, so erhält man für eine sehr große Anzahl G von individuellen Verwirklichungen einer Maschinentype mit N Kombinationen verschiedene Vektoren J_1, J_2, \dots, J_G . Zu diesen G Vektoren J bestimmen (94) insgesamt $4G$ resultierende Zuwächse $\Delta Q_r, \Delta P_r, \Delta Q_a, \Delta P_a$. Die in (98) gebildeten quadratischen Mittelwerte mit dem schließlichen Ergebnis (113) beziehen sich auf diese Systemgesamtheit von individuellen Verwirklichungen und zeigen, mit welcher Abweichung $\sqrt{(\Delta Q_r)^2}$ in Funktion von $\sqrt{\xi^2}$ bzw. ξ_0 man etwa bei einer individuellen Verwirklichung ohne Nachjustieren einzelner Kombinationen zu rechnen hat.

Zum Abschluß der Diskussion über den Einfluß von Justierfehlern, soll nun noch untersucht werden, was mit einem ungestört eingeschossenen Teilchen in n Umläufen geschieht, dessen radialer oder axialer Zustandsvektor in Folge Justierfehler pro ein Umlauf den resultierenden Zuwachs $\{\Delta Q, \Delta P\}$ erfährt.

Nach (44) ist der Zustandsvektor dieses Teilchens am Ende des zweiten Umlaufs

$$\begin{aligned} Q_2 &= \Delta Q + \Delta Q \cos \Phi + \Delta Q^* \sin \Phi, \\ P_2 &= \Delta P + \Delta P \cos \Phi + \Delta P^* \sin \Phi. \end{aligned}$$

Also am Ende des n -ten Umlaufs

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \Delta Q [1 + \cos \Phi + \cos 2\Phi + \dots + \cos (n-1)\Phi] \\ &\quad + \Delta Q^* [\sin \Phi + \sin 2\Phi + \dots + \sin (n-1)\Phi], \\ P_n &= \Delta P [1 + \cos \Phi + \cos 2\Phi + \dots + \cos (n-1)\Phi] \\ &\quad + \Delta P^* [\sin \Phi + \sin 2\Phi + \dots + \sin (n-1)\Phi]. \end{aligned} \right\} \quad (114).$$

Dabei ist mit N Kombinationen pro ein Umlauf $\Phi = N\varphi$. Durch Übergang auf die Exponentialfunktion und Summation der entstehenden geometrischen Reihen beweist man

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{2} \Delta Q \left[1 - \cos n\Phi + \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} \sin n\Phi \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta Q^* \left[\frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} (1 - \cos n\Phi) \right. \\ &\quad \left. - \sin n\Phi \right], \\ P_n &= \frac{1}{2} \Delta P \left[1 - \cos n\Phi + \frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} \sin n\Phi \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta P^* \left[\frac{\sin \Phi}{1 - \cos \Phi} (1 - \cos n\Phi) \right. \\ &\quad \left. - \sin n\Phi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Nach (115) pendelt Q_n bei wachsendem n mit der Amplitude

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\Delta Q)^2 + (\Delta Q^*)^2] / (1 - \cos \Phi)}$$

um den Mittelwert

$$\frac{1}{2} \{\Delta Q + [\sin \Phi / (1 - \cos \Phi)] \Delta Q^*\}$$

und analog auch P_n .

Die durch $\{\Delta Q, \Delta P\}$ repräsentierten Justierfehler vermögen also die Stabilität der Teilchenbahn nicht zu stören, solange man den durch $\cos \Phi = 1$ charakterisierten Resonanzstellen fernbleibt. In der Nähe einer Gegenresonanzstelle mit $\cos \Phi = -1$ muß

$$\Phi = N\varphi = N(Z/M)\pi$$

nahe ein ungerades Vielfaches von π sein.

$Z < M$ und M sind entsprechend den Ausführungen oben am Schluß von Abschnitt 5 zueinander teilerfremde natürliche Zahlen, insbesondere für die Mitte des Stabilitätsbereichs ist M nahe $2Z$, etwa $M = 2Z \pm 1$, wo $Z \gg 1$ ist. Bedingung für Gegenresonanz ist dann, daß $N/2$ ungerade sei.

Es kann also $\Phi = (N/2)\pi(1 + \varepsilon)$ gesetzt werden, wo ε eine zu 1 kleine Zahl ist. In erster Näherung wird nun aus (115)

$$\left. \begin{aligned} Q_n &= \frac{1}{2} \Delta Q \{1 - (-1)^n \cos [n(N/2)\pi\varepsilon]\} \\ &\quad - (-1)^n \frac{1}{2} \Delta Q^* \sin [n(N/2)\pi\varepsilon], \\ P_n &= \frac{1}{2} \Delta P \{1 - (-1)^n \cos [n(N/2)\pi\varepsilon]\} \\ &\quad - (-1)^n \frac{1}{2} \Delta P^* \sin [n(N/2)\pi\varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Die Periode in n , mit welcher Q_n und P_n mit der Amplitude $\frac{1}{2} \sqrt{(\Delta Q)^2 + (\Delta Q^*)^2}$ um den Mittelwert $\Delta Q/2$ pendeln, ist um so größer, je kleiner ε , je näher also φ an $\pi/2$ liegt.

Es sind in diesem Abschnitt nur Dejustierungen der als starr angenommenen N Kombinationen betrachtet worden. Der Einfluß von Dejustierungen innerhalb der Kombinationen, insbesondere der magnetischen Führungsfelder von ihren Sollwerten kann in analoger Weise ermittelt werden.

8. Fokussierung durch die elektrischen Beschleunigungsfelder.

ROSE [4] hat für die fokussierende Wirkung elektrischer Beschleunigungsfelder auf achsennahe Teilchenbahnen Ausdrücke angegeben, welche verallgemeinert für beliebige spezifische Energien E der Teilchen lauten:

$$\Delta_1(dr/dz) = -(\Delta E/E)^2 [(1 + 1/E^2)/(1 - 1/E^2)^2] (r/2s), \quad (117)$$

$$\Delta_2(dr/dz) = (\Delta E/E) (1 - 1/E^2)^{-3/2} (\alpha r/2c). \quad (118)$$

Das zur Richtung z der Bahn des ungestörten Teilchens rotationssymmetrische Beschleunigungsfeld, welches der spezifischen Teilchenenergie E die Zunahme ΔE erteilt, sei in dieser z -Richtung sehr kurz relativ zur Länge $\vartheta = R\vartheta$ einer Kombination. Der Radius $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist die zweite zu z gehörende

Zylinder-Koordinate. Die linken Seiten $\Delta_1(dr/dz)$ und $\Delta_2(dr/dz)$ von (117) bzw. (118) bedeuten die quasi unstetige Änderung, welche die Bahnrichtung dr/dz beim Passieren der Beschleunigungsstrecke in Folge zweier verschiedener Effekte durch die radialen Komponenten des Beschleunigungsfeldes erfährt. $\Delta_1(dr/dz)$ resultiert nämlich aus der in Folge ΔE über die Beschleunigungsstrecke zunehmenden Bahnsteifigkeit gegenüber radialen Feldkomponenten, während $\Delta_2(dr/dz)$ dem Umstand Rechnung trägt, daß das Beschleunigungsfeld sich während des Beschleunigungsvorganges mit der Zeit proportional $1 + \alpha t$ ändert.

sist die durch $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} E_z dz \right)^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} E_z^2 dz$ definierte effektive Länge der Beschleunigungsstrecke, E_z die mit z veränderliche z -Komponente der beschleunigenden elektrischen Feldstärke in der z -Achse und c die Lichtgeschwindigkeit.

Befindet sich zwischen der n ten und der $(n+1)$ -ten Kombination eine Beschleunigungsstrecke, in welche das gestörte Teilchen mit dem radialen oder axialen Zustandsvektor $\{q_n, p_n\}$ eintritt, so ist dieser Zustandsvektor nach der Beschleunigung, also am Eintritt in die $(n+1)$ -te Kombination $\{q_n, p_n + \beta q_n\}$, denn (117) und (118) besagen einzeln und zusammen, daß $p_n = (\dot{q})_n / \omega = (dq/dz)_n (v/\omega) = (dr/dz)_n (v/\omega)$ beim Passieren der Beschleunigungsstrecke eine zu $q_n = r$ proportionale Änderung erfährt. β ist die durch (117) und (118) bestimmte Proportionalitätskonstante. Am Ende der $(n+1)$ -ten Kombination gilt also für den Zustandsvektor $\{q_{n+1}, p_{n+1}\}$

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= a_{11} q_n + a_{12} (p_n + \beta q_n), \\ p_{n+1} &= a_{21} q_n + a_{22} (p_n + \beta q_n), \end{aligned}$$

also an Stelle der Transformation (10)

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= (a_{11} + \beta a_{12}) q_n + a_{12} p_n, \\ p_{n+1} &= (a_{21} + \beta a_{22}) q_n + a_{22} p_n, \end{aligned} \quad (119)$$

deren Determinante unverändert gleich 1.

Ist jede Kombination von einer Beschleunigungsstrecke gefolgt und können für die Dauer einer Periode der gestörten Bahn ΔE , E , α , s und also β als konstant angenommen werden, so liegen nach (119) die Spitzen der Zustandsvektoren in Folge der Beschleunigungen auf einer zu (16) benachbarten Ellipse,

$$\left. \begin{aligned} (a_{21} + a_{22}) q^2 + (a_{22} - a_{11} - \beta a_{12}) q p - a_{12} p^2 \\ = \text{konstant}, \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

die mit (16) die beiden Punkte bei $q = 0$ gemeinsam hat und die, ausgehend von einem Startvektor $\{q_0, p_0\}$, nach einer vollen Periode der gestörten Bahn auch wieder nach $\{q_0, p_0\}$ zurückführt. Die resultierende Fokussierung durch die von ROSE betrachteten Effekte der radialgerichteten Feldkomponenten von Beschleunigungsstrecken ist also null. Dagegen soll mit der adiabatischen Dämpfung der Betatronschwingungen der Bahn in Folge der zur Zunahme der spezifischen Teilchenenergie E , also der Teilchengeschwindigkeit v koordinierten Zunahme des magnetischen Führungsfeldes gerechnet werden.

9. Adiabatische Dämpfung.

Die Bahn des ungestörten Teilchens bleibt trotz der Zunahme von v erhalten, falls gleichzeitig mit v

das magnetische Führungsfeld B proportional zu $v/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ gesteigert wird. Dabei ändert sich auch das Verhältnis von v zur Kreisfrequenz Ω eines vollen Teilchenumlaufs nicht. Die Koeffizienten a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} der für die Kombination charakteristischen Transformation (10) hängen aber nur ab von der Geometrie der die Kombination ausmachenden Sektoren, von den die räumliche Inhomogenität des magnetischen Führungsfeldes in den einzelnen Sektoren kennzeichnenden Zahlwerten $(\partial B/\partial r)/(B/r)$ und vom Verhältnis v/Ω , also von Faktoren, die alle bei koordiniert zunehmendem v und B invariant sind. Da Stabilität und Periodizität der Bahn sowohl eines radial wie eines axial gestörten Teilchens durch die entsprechenden Koeffizienten $a_{11} \dots a_{22}$ bestimmt sind, ändern auch diese Bahneigenschaften bei koordiniert zunehmendem v und B nicht, ja die Bahn eines gestörten Teilchens mit den Startvektoren $\{q_0, p_0\}$ und $\{q_0, p_0\}$ bliebe trotz zunehmendem v und B exakt erhalten, wenn die Querabweichungen q und damit auch die Quergeschwindigkeiten p keine adiabatische Dämpfung erfahren würden. Andererseits ist die Bahn eines gestörten Teilchens frei für die adiabatische Dämpfung, denn multipliziert man die Querabweichungen einer mit allen Bedingungen verträglichen Bahn mit einem konstanten Faktor, so erhält man wieder eine mit allen Bedingungen verträgliche Bahn.

Nach dem EHRENFESTSchen Adiabatenprinzip ist die über eine Periode eines konservativen periodischen Systems gemittelte kinetische Energie \bar{L} geteilt durch die Frequenz, mit welcher sich das System wiederholt, eine adiabatische Invariante. Sowohl für ein in radialer, wie ein in axialer Richtung gestörtes Teilchen, dessen Zustandspunkt ausgehend von $\{q_0, p_0\}$ in einer Periode die Ellipse (16) durchläuft und wieder nach $\{q_0, p_0\}$ zurückkehrt, kann der Ansatz gemacht werden

$$\bar{L} = \left[m/\sqrt{1 - (v/c)^2} \right] \Omega^2 \left[a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2 \right] \Psi. \quad (121)$$

$m/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ ist die transversale Masse des Teilchens, Ω die Kreisfrequenz eines vollen Teilchenumlaufs, $[a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2]$ das vom Startvektor $\{q_0, p_0\}$ abhängige absolute Glied der Ellipse (16), endlich Ψ eine Größe, welche nicht nur von den Koeffizienten $a_{11} \dots a_{22}$, sondern auch vom „Innern“ der Kombination, d. h. von der Geometrie und den Kennzahlen $(\partial B/\partial r)/(B/r)$ der magnetischen Führungsfelder in den einzelnen die Kombination konstituierenden Sektoren, und endlich von der Phase, also vom Verhältnis q_0/p_0 des Startvektors abhängt. Ψ ist offensichtlich von den koordiniert zunehmenden v und B unabhängig. Die Frequenz, mit welcher sich das System wiederholt, ist proportional Ω . Folglich ist \bar{L}/Ω nach (121) adiabatisch invariant. Da koordiniert $[m/\sqrt{1 - (v/c)^2}] \Omega$ zum Magnetfeld B proportional zunimmt, muß das Produkt von B und $[a_{21} q_0^2 + (a_{22} - a_{11}) q_0 p_0 - a_{12} p_0^2]$ eine Invariante sein. In Folge adiabatischer Dämpfung nehmen alle Querabweichungen also wie $1/\sqrt{B}$ ab. Dagegen nimmt \bar{L} wie Ω , also wie v zu. Dies verträgt sich mit den nach $1/\sqrt{B}$ abnehmenden Schwingungsamplituden, weil die transversale Masse und die durch LORENTZkräfte eBv bewirkte harmonische Bindung beide mit v zunehmen. Diese Verhältnisse sind ähnlich wie beim

Fadenpendel mit adiabatisch kürzer werdender Fadenlänge.

Ist $\Delta B/B$ die relative Zunahme des Magnetfeldes pro ein Umlauf, so folgt für die relative Abnahme einer Querabweichung pro ein Umlauf

$$-\Delta q/q = \frac{1}{2} \Delta B/B.$$

Drückt man $\Delta B/B$ aus durch die spezifische Energie E und deren Zunahme ΔE pro ein Umlauf, so ist

$$-\Delta q/q = \frac{1}{2} E \Delta E / (E^2 - 1). \quad (122)$$

Für Protonen mit $e/m = 0,957 \cdot 10^{12} [\text{V}^{-1} \text{cm}^2 \text{sec}^{-2}]$ und einer Beschleunigung um $U = 10^5 [\text{V}]$ pro ein Umlauf, entsprechend dem in [1] erwähnten Projekt eines Synchrotrons für 30 [BeV] ist

$$\Delta E = eU/mc^2 = 1,06 \cdot 10^{-4}.$$

Aus (122) folgt dann $-\Delta q/q$ entsprechend folgender Tabelle

Voltgeschwindigkeit:

$10^7 \quad 10^8 \quad 10^9 \quad 10^{10} \quad 10^{11} [\text{eV}]$

Spez. Energie E :

1,0106 1,106 2,06 11,6 107

$-\Delta q/q$:

$2,7 \cdot 10^{-3} \quad 2,8 \cdot 10^{-4} \quad 3,4 \cdot 10^{-5} \quad 4,6 \cdot 10^{-6} \quad 5,0 \cdot 10^{-7}.$

10. Synchrotronschwingungen.

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit für ein Teilchen, welches auch in der Energie vom ungestörten, synchronen Teilchen abweicht, innerhalb eines Sektors mit einem Kreisbogen als Bahn des ungestörten, synchronen Teilchens in voller Allgemeinheit die Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten anzuschreiben. Auf diesem Weg ergeben sich Bahnkurven, welche als Überlagerung von Betatronschwingungen über die stationäre Bahn des Teilchens, das in der Energie vom stationären, synchronen Teilchen abweicht, aufgefaßt werden können. Diese überlagerten Betatronschwingungen lassen die einfachen Zusammenhänge, welche die hier interessierenden Synchrotron- oder Phasenschwingungen beherrschen, nicht klar hervortreten. Durchsichtiger und nicht weniger streng ist statt mit den wirklich durchlaufenen Bahnkurven nur mit den diesen zugeordneten stationären Bahnen zu rechnen, und so die Betrachtung der als Ausgleichsvorgänge überlagerten Betatronschwingungen zu vermeiden.

Ein ungestörtes synchrones Teilchen werde mit der Ruhenergie in ein Synchrotron eingeschossen und zu Beginn jedes Umlaufs um $\cos \Phi$ beschleunigt. U ist der Scheitelwert der beschleunigenden Wechselspannung und Φ die Phasenverspätung gegenüber dem Scheitelwert, mit welcher das Teilchen die Beschleunigungsstrecke passiert. Die spezifische Teilchenenergie während des ν -ten Umlaufs ist dann

$$E_\nu = 1 + \nu \Delta E \cos \Phi, \quad (123)$$

wo wieder

$$\Delta E = eU/mc^2. \quad (124)$$

Damit ein Teilchen der spezifischen Energie E_ν auf einem Kreis vom Radius R läuft, ist ein Magnetfeld B_ν erforderlich, das sich aus

$$(eB_\nu/mc)R = \sqrt{E_\nu^2 - 1} \quad (125)$$

bestimmt. Die Dauer Θ_ν eines vollen Umlaufs auf dem Kreis vom Radius R folgt aus

$$c \Theta_\nu = 2\pi R / \sqrt{1 - E_\nu^{-2}}. \quad (126)$$

Ist der Kreis von feldfreien, also geraden Bahnstrecken der Gesamtlänge L unterbrochen, so tritt in (126) $2\pi R + L$ an Stelle von $2\pi R$. Es bedarf keiner Ausführungen, wie (123) zu modifizieren ist, wenn mit Vorbeschleunigung eingeschossen, und wie (123) bis (126) abzuändern sind, wenn pro ein Umlauf mehrmals beschleunigt wird.

Für den ν -ten Umlauf eines gestörten, nicht synchronen Teilchens sei

die spezifische Energie $E_\nu + \varepsilon_\nu$,

die Phasenverspätung, bei welcher beschleunigt wird, $\Phi + \varphi_\nu$,

die Dauer eines Umlaufs auf der zu $E_\nu + \varepsilon_\nu$ gehörenden stationären Bahn $\Theta_\nu + \vartheta_\nu$.

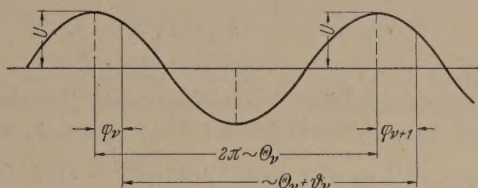


Abb. 5. Die in die kinematische Beziehung für die Synchrotronschwingungen eingehenden Winkel.

Für die ν -te Beschleunigung dieses gestörten, nicht synchronen Teilchens ist offenbar (Energiesatz)

$$E_\nu + \varepsilon_\nu - E_{\nu-1} - \varepsilon_{\nu-1} = \Delta E \cos (\Phi + \varphi_\nu).$$

Subtrahiert man die analoge Beziehung für das ungestörte, synchrone Teilchen

$$E_\nu - E_{\nu-1} = \Delta E \cos \Phi,$$

so resultiert

$$\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1} = \Delta E [\cos (\Phi + \varphi_\nu) - \cos \Phi].$$

Falls φ_ν so klein, daß $\cos \varphi_\nu = 1$ und $\sin \varphi_\nu = \varphi_\nu$ gesetzt werden darf, resultiert

$$\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1} = -\Delta E \sin \Phi \cdot \varphi_\nu. \quad (127)$$

Der Abb. 5 entnimmt man (kinematische Beziehung)

$$\varphi_{\nu+1} = \varphi_\nu + 2\pi \vartheta_\nu / \Theta_\nu. \quad (128)$$

Voraussetzung von (128) ist, daß die tatsächlichen Abweichungen in der Dauer eines Umlaufs mit ϑ_ν , der Abweichung für den Umlauf auf einer stationären Bahn übereinstimmen, oder, anders ausgedrückt, daß überlagerte Betatronschwingungen die Dauer eines Umlaufs nicht beeinflussen, eine Annahme, die bereits in den Gleichungen (1) und (4) steckt.

Die Beziehungen (127) und (128) gelten unabhängig von der besonderen Konstruktion des Synchrotrons sowohl für ein Gerät mit homogener, wie für ein Gerät mit starker Fokussierung. Anders ist es mit der dritten und letzten Beziehung, die man bedarf um die Synchrotron- oder Phasenschwingungen eines gestörten, nicht synchronen Teilchens zu berechnen, mit der Beziehung zwischen ϑ_ν und ε_ν . Diese hängt von der stationären Bahn eines Teilchens mit der Energie $E_\nu + \varepsilon_\nu$ ab.

Im Fall eines Synchrotrons mit homogener Fokussierung ist diese stationäre Bahn eine Kreisbahn mit dem Radius $R + r_\nu$, wobei r_ν sich aus ε_ν und der räum-

lichen Inhomogenität des Magnetfeldes $B_v (1 - \sigma r_v/R)$ bestimmt. Darin ist $\sigma = -(\partial B/\partial r)/(B/R)$ die die Inhomogenität in radialer Richtung kennzeichnende Zahl. Betrachtet man r_v , ε_v und $-B_v \sigma r_v/R$ als Differentiale von R , E_v und B_v , so erhält man durch logarithmische Differentiation von (125)

$$(1 - \sigma) r_v/R = E_v \varepsilon_v/(E_v^2 - 1). \quad (129)$$

Die zu ε_v/E_v gehörende relative Impulsänderung ist

$$p_v/P_v = [E_v^2/(E_v^2 - 1)]/(\varepsilon_v/E_v), \quad (130)$$

so daß statt (129) auch

$$(1 - \sigma) r_v/R = p_v/P_v \quad (131)$$

geschrieben werden kann. Läuft nun das Teilchen mit der Energie $E_v + \varepsilon_v$ auf dem Kreis mit dem Radius $R + r_v$, so resultiert die verlängerte Dauer eines Umlaufs $\Theta_v + \vartheta_v$, wo analog wie (129) durch logarithmische Differentiation von (126) sich ergibt

$$\vartheta_v/\Theta_v = r_v/R - (\varepsilon_v/E_v)/(E_v^2 - 1). \quad (132)$$

Der erste Term rührt von der Zunahme der Bahnlänge, also des Radius, der zweite von der Zunahme der Energie her. Wird (129) in (132) eingesetzt, so folgt

$$\vartheta_v/\Theta_v = [(1 - \sigma)^{-1} - E_v^{-2}] [E_v^2/(E_v^2 - 1)] (\varepsilon_v/E_v). \quad (133)$$

Wegen (130) kann dafür auch geschrieben werden

$$\vartheta_v/\Theta_v = [(1 - \sigma)^{-1} - E_v^{-2}] (p_v/P_v). \quad (134)$$

Die Beziehungen (127), (128) und (133) erlauben eine rekursive Berechnung, denn ausgehend von φ_v und ε_{v-1} folgt aus (127) ε_v , dann aus (133) ϑ_v/Θ_v und damit aus (128) φ_{v+1} , denn E_v ist jeweils durch (123) bestimmt. Sind die anfängliche Abweichung ε_0 der Energie und die Startphase φ_1 bekannt, so können in dieser Weise alle ε_v , φ_v , ϑ_v und aus (129) auch r_v berechnet werden. Wünscht man diese Werte auf die Zeitskala t abzubilden, so liefert (126) die mit der ersten Beschleunigung $t = 0$ beginnende Zeit

$$ct = c \sum_1^v \Theta_v = 2\pi R \sum_1^v (1 - E_v^{-2})^{-1/2}. \quad (135)$$

Denkt man sich die rekursiv berechneten ε_v in Funktion von v aufgetragen, so erhält man für größere Werte v eine Wertefolge ε_v , die sich durch eine stetige Funktion ε von v interpolieren läßt, ebenso die φ_v und ϑ_v durch stetige Funktionen φ und ϑ . Aus den Differentialgleichungen für ε , φ , ϑ , welche den Differenzengleichungen (127) und (128) entsprechen und der zu (133) analogen Gleichung für ϑ , kann man die mit Gleichung (15') in [5] übereinstimmende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dv} \left(f(k) v \frac{d\varphi}{dv} \right) + 2\pi \operatorname{tg} \Phi \cdot \varphi = 0 \quad (136)$$

für φ allein ableiten.

Darin ist

$$f(k) = (1 - \sigma) (2 + 3k + k^2)/(\sigma + 2k + k^2)$$

eine mit wachsendem $k = v \Delta E \cos \Phi$ von $2(1 - \sigma)/\sigma$ monoton und asymptotisch auf $(1 - \sigma)$ abfallende Funktion. Nimmt man an, $f(k)$ sei im interessierenden Bereich konstant, so läßt sich φ nach (136) durch eine BESSELFUNKTION von \sqrt{v} darstellen. Der Übergang von v vermöge (135) auf die Zeit t bietet keine Schwierig-

keiten. Durch berücksichtigen einer langsamen Änderung von $f(k)$ mit k kann diese Approximation noch verschärft werden. Die hier nur angedeutete Berechnung der Synchrotronschwingungen beim Synchrotron mit homogener Fokussierung läßt sich ohne weiteres auf ein Synchrotron mit starker Fokussierung übertragen.

Das Einzige, was ändert, ist der erste Term auf der rechten Seite von (132), also der Einfluß der Bahnexpansion in Folge des nichtsynchrone Zuwachses ε von E auf die Dauer eines Umlaufs. Insbesondere tritt an Stelle von (133), falls außerdem der Index v weggelassen wird

$$\vartheta/\Theta = [\varrho - E^{-2}] [E^2/(E^2 - 1)] (\varepsilon/E) \quad (137)$$

oder wegen (130)

$$\vartheta/\Theta = (\varrho - E^{-2}) (p/P). \quad (138)$$

$\varrho p/P$ ist die von der Geometrie und der räumlichen Inhomogenität der magnetischen Führungsfelder der Kombination abhängige relative Zunahme der Bahnlänge.

Für eine Kombination wie das Beispiel in Abschnitt 6, aber vereinfacht, ohne feldfreie Sektoren, soll nun der Faktor ϱ berechnet werden. Im fokussierenden Sektor gilt für die Zunahme r des Radius gegenüber dem Radius R der Bahn des ungestörten synchronen Teilchens

$$\ddot{r} + \omega_f^2 (r - a_f) = 0. \quad (139)$$

ω_f ist wie in Abschnitt 6 die Kreisfrequenz der Betatronschwingungen, a_f die Zunahme des Radius gegenüber R für die im fokussierenden Sektor zur Energie $E + \varepsilon$ gehörende stationäre Kreisbahn. Analog wie (129) ist

$$(a_f/R) (\omega_f/\Omega)^2 = E \varepsilon/(E^2 - 1) = p/P, \quad (140)$$

wo p/P wie in (130) die ε/E entsprechende relative Zunahme des Bahnimpulses gegenüber einem mit P und der Kreisfrequenz Ω auf dem Kreis vom Radius R umlaufenden ungestörten, synchronen Teilchen bedeutet. Wie (1) zur Transformation (3), so führt (139) zu

$$\left. \begin{aligned} r_1 - a_f &= \cos u_f \cdot (r_0 - a_f) + \sin u_f \cdot (\dot{r}_0/\omega_f), \\ \dot{r}_1/\omega_f &= -\sin u_f \cdot (r_0 - a_f) + \cos u_f \cdot (\dot{r}_0/\omega_f). \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Darin ist $u_f = \omega_f (t_1 - t_0)$ die Breite des Sektors. Von der Laufzeit $t_1 - t_0$ wird angenommen, sie stimme überein mit der Laufzeit des synchronen Teilchens. Das ist streng nicht richtig, bedeutet aber für (141) lediglich eine Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung.

Im anschließenden defokussierenden Sektor gelten analog zu (139), (140) und (141)

$$\ddot{r} + \omega_d^2 (r - a_d) = 0, \quad (142)$$

$$(a_d/R) (\omega_d/\Omega)^2 = E \varepsilon/(E^2 - 1) = p/P, \quad (143)$$

$$\left. \begin{aligned} r_2 - a_d &= \cos u_d (r_1 - a_d) + \sin u_d \cdot (\dot{r}_1/\omega_d), \\ \dot{r}_2/\omega_d &= -\sin u_d (r_1 - a_d) + \cos u_d \cdot (\dot{r}_1/\omega_d), \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

vorausgesetzt allerdings, daß hier $\omega_d^2 < 0$, also ω_d imaginär ist.

Diese Schreibweise empfiehlt sich im Interesse einer einfachen, die Symmetrie wahrnehmenden Rechnung. Die zu ε/E gehörende stationäre Bahn eines asynchronen Teilchens, muß sich bei starker Fokussierung in jeder

Kombination wiederholen. Zu (141) und (144) treten daher noch die Bedingungen $r_2 = r_0$ und $\dot{r}_2 = \dot{r}_0$. Damit folgen aus den 4 linearen Gleichungen (141) und (144)

$$\left. \begin{aligned} r_0 - a_f &= [1 + \cos u_f - \cos u_d - \cos u_f \cos u_d \\ &\quad + (\omega_d/\omega_f) \sin u_f \sin u_d] (a_d - a_f)/\Delta, \\ \dot{r}_0/\omega_f &= [\sin u_f (1 - \cos u_d) + (\omega_d/\omega_f) \sin u_d \\ &\quad \times (1 - \cos u_f)] (a_d - a_f)/\Delta. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 - a_d &= [1 + \cos u_d - \cos u_f - \cos u_d \cos u_f \\ &\quad + (\omega_f/\omega_d) \sin u_d \sin u_f] (a_f - a_d)/\Delta, \\ \dot{r}_1/\omega_d &= [\sin u_d (1 - \cos u_f) + (\omega_f/\omega_d) \sin u_f \\ &\quad \times (1 - \cos u_d)] (a_f - a_d)/\Delta. \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Darin ist die Determinante

$$\Delta = 2(1 - \cos u_f \cdot \cos u_d) + (\omega_f/\omega_d) \left\{ \begin{aligned} &+ \omega_d/\omega_f \sin u_f \sin u_d. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Durch (145), (146), (147) ist die zu ε/E gehörende stationäre Bahn bestimmt.

Insbesondere gilt im fokussierenden Sektor für die Zunahme r des Radius analog zur ersten Gleichung (141)

$$r = \cos u \cdot (r_0 - a_f) + \sin u \cdot (\dot{r}_0/\omega_f) + a_f, \quad (148)$$

mit dem Argument u in den Grenzen $0 \leq u \leq u_f$.

Ebenso ist für den defokussierenden Sektor

$$r = \cos u \cdot (r_1 - a_d) + \sin u \cdot (\dot{r}_1/\omega_d) + a_d \quad (149)$$

mit u in den Grenzen $0 \leq u \leq u_d$.

Durch Integration von (148) und (149) nach der Zeit t , oder nach dem zu t proportionalen Winkel Ωt über den ersten bzw. den zweiten Bereich, Addition der beiden Integrale und Division durch den Winkel der ganzen Kombination erhält man als Mittelwert von r innerhalb der Kombination

$$\bar{r} = \left\{ \begin{aligned} &a_f u_f \Omega/\omega_f + a_d u_d \Omega/\omega_d \\ &+ (\Omega/\omega_f) [(r_0 - a_f) \sin u_f + (\dot{r}_0/\omega_f) \\ &\quad \times (1 - \cos u_f)] \\ &+ (\Omega/\omega_d) [(r_1 - a_d) \sin u_d + (\dot{r}_1/\omega_d) \\ &\quad \times (1 - \cos u_d)] \end{aligned} \right\} / (u_f \Omega/\omega_f + u_d \Omega/\omega_d). \quad (150)$$

Darin (145) und (146) eingesetzt:

$$\bar{r} = \left\{ \begin{aligned} &a_f u_f/\omega_f + a_d u_d/\omega_d \\ &+ [2(a_f - a_d)/\Delta] \{ (1/\omega_d) [\sin u_d (1 - \cos u_f) \\ &\quad + (\omega_f/\omega_d) \sin u_f (1 - \cos u_d)] - (1/\omega_f) \\ &\quad \times [\sin u_f (1 - \cos u_d) + (\omega_d/\omega_f) \sin u_d \\ &\quad \times (1 - \cos u_f)] \} / [u_f/\omega_f + u_d/\omega_d]. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Nach Umordnen und Einsetzen von Δ nach (147)

$$\bar{r} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a_f - a_d)(\omega_f^2 - \omega_d^2)}{u_f \omega_d + u_d \omega_f} \\ &\times \frac{\omega_d \sin u_d (1 - \cos u_f) + \omega_f \sin u_f (1 - \cos u_d)}{\omega_f \omega_d (1 - \cos u_f \cos u_d) + \frac{1}{2}(\omega_f^2 + \omega_d^2) \sin u_f \sin u_d} \\ &+ \frac{a_f u_f \omega_d + a_d u_d \omega_f}{u_f \omega_d + u_d \omega_f}. \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

Durch Übergang auf die halben Winkel erhält man

dafür

$$\bar{r} = \frac{(a_f - a_d)(\omega_f^2 - \omega_d^2)}{u_f \omega_d + u_d \omega_f} 2 \left\{ \omega_f \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + \omega_d \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right\}^{-1} + \frac{a_f u_f \omega_d + a_d u_d \omega_f}{u_f \omega_d + u_d \omega_f}. \quad (153)$$

Drückt man darin a_f und a_d vermöge (137) und (140) aus und wird beachtet, daß

$$(\omega_f/\Omega)^2 = 1 + \sigma_f \quad \text{und} \quad (\omega_d/\Omega)^2 = 1 + \sigma_d, \quad (154)$$

wo σ_f und σ_d die für die Inhomogenität der magnetischen Führungsfelder charakteristischen Zahlen, so folgt

$$\bar{r}/R = (p/P) \left\{ \begin{aligned} &\frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)] \cdot \frac{\omega_f^2 - \omega_d^2}{\omega_f \omega_d}}{u_f/\omega_f + u_d/\omega_d} \\ &\times 2 \left[\omega_f \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + \omega_d \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} \\ &+ \frac{(u_f/\omega_f)/(1 + \sigma_f) + (u_d/\omega_d)/(1 + \sigma_d)}{u_f/\omega_f + u_d/\omega_d}. \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

Macht man Gebrauch, daß

$$u_f = \omega_f \vartheta_f/\Omega \quad \text{und} \quad u_d = \omega_d \vartheta_d/\Omega, \quad (156)$$

wo ϑ_f und ϑ_d die zum fokussierenden bzw. defokussierenden Sektor gehörenden Zentriwinkel, so kann dies auch geschrieben werden

$$\bar{r}/R = (p/P) \left\{ \begin{aligned} &\frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)]}{\vartheta_f + \vartheta_d} \\ &\times \frac{\sigma_f - \sigma_d}{\sqrt{(1 + \sigma_f)(1 + \sigma_d)}} \\ &\times 2 \left[(u_f/\vartheta_f) \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + (u_d/\vartheta_d) \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} \\ &+ \frac{\vartheta_f/(1 + \sigma_f) + \vartheta_d/(1 + \sigma_d)}{\vartheta_f + \vartheta_d}. \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Damit wird

$$\varrho = \left\{ \begin{aligned} &\frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)](\sigma_f - \sigma_d)}{\sqrt{(1 + \sigma_f)(1 + \sigma_d)}} \cdot \frac{2 \vartheta_f \vartheta_d}{\vartheta_f + \vartheta_d} \\ &\times \left[u_f \vartheta_d \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + u_d \vartheta_f \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} \\ &+ [\vartheta_f/(1 + \sigma_f) + \vartheta_d/(1 + \sigma_d)]/(\vartheta_f + \vartheta_d). \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Sind die Zentriwinkel der beiden Sektoren $\vartheta_f = \vartheta_d$ gleich lang, so ist spezieller

$$\varrho = \left\{ \begin{aligned} &\frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)](\sigma_f - \sigma_d)}{\sqrt{(1 + \sigma_f)(1 + \sigma_d)}} \\ &\times \left[u_f \operatorname{ctg} \frac{u_d}{2} + u_d \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} [1/(1 + \sigma_f) + 1/(1 + \sigma_d)]. \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Dies stimmt überein mit Formel (8) in [1] bis auf das Vorzeichen des ersten Terms von (159), eine Diskrepanz, welche im Prinzip davon herrührt, daß in [1] das Vorzeichen von $[-1]^n = \pm i$ nicht diskutiert und im Endresultat verkehrt angegeben wird, wie wenn mit positivem p/P die Bahnlänge abnähme. In (158) und (159) ist die Wurzel positiv zu nehmen. Beachtet man, daß im defokussierenden Sektor $\sigma_d < 0$, also wegen (154) und (157) u_d/i reell, so läßt sich (158) schreiben:

$$\varrho = \left\{ \begin{aligned} &\frac{[1/(1 + \sigma_f) - 1/(1 + \sigma_d)](\sigma_f - \sigma_d)}{\sqrt{(1 + \sigma_f)(-1 - \sigma_d)}} \cdot \frac{2 \vartheta_f \vartheta_d}{\vartheta_f + \vartheta_d} \\ &\times \left[u_f \vartheta_d \operatorname{ctg} \left(\frac{u_d}{2i} \right) - \left(\frac{u_d}{i} \right) \vartheta_f \operatorname{ctg} \frac{u_f}{2} \right]^{-1} \\ &+ [\vartheta_f/(1 + \sigma_f) + \vartheta_d/(1 + \sigma_d)]/(\vartheta_f + \vartheta_d). \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Für $\vartheta_f = \vartheta_d$, $\sigma_f = -\sigma_d = \sigma \gg 1$ und die Mitte des Stabilitätsbereichs $u_f = u_d/i = \pi/2$ wird aus (160)

$$\varrho = 8/\pi [\zeta(\pi/4) - \operatorname{ctg}(\pi/4)] \sigma = 4,85/\sigma. \quad (161)$$

Beim Synchrotron mit homogener Fokussierung war in (133) an Stelle von ϱ der Term $(1-\sigma)^{-1}$, der für in radialer und axialer Richtung gleiche Fokussierung, also $\sigma=1/2$ den Wert 2 hat, der immer größer als der zweite Term E^{-2} ist. Beim Synchrotron mit homogener Fokussierung nimmt also die Dauer eines Umlaufs mit einem asynchronen Zuwachs des Bahnimpulses stets zu. Anders bei starker Fokussierung. Hier ist, da ϱ klein — beispielsweise für $\sigma=4000$ folgt $\varrho=4,85/4000=1,21 \cdot 10^{-3}$ — der Faktor $\varrho-E^{-2}$ für kleine Energien E zunächst negativ: die Abnahme der Dauer eines Umlaufs infolge Zunahme der Bahngeschwindigkeit überwiegt über die Zunahme der Dauer eines Umlaufs infolge Zunahme der Bahnlänge. Die Bahnlänge ist bei der starken Fokussierung sehr viel unempfindlicher gegen eine Zunahme des Bahnimpulses als bei homogener Fokussierung. Die Bahn ist steifer. Erst wenn $E^{-2} < \varrho$, also für spezifische Energien $E > 28,8$ werden die Verhältnisse wie beim Synchrotron mit homogener Fokussierung. Unterhalb 28,8 hat man auf dem ansteigenden, oberhalb 28,8 auf dem abfallenden Ast der Wechselladung zu beschleunigen, um eine Fokussierung in der Phase zu erhalten.

Für Protonen entspricht die spezifische Energie 28,8 der Voltgeschwindigkeit $2,7 \cdot 10^{10}$ [eV].

Literatur. [1] COURANT, E., S. LIVINGSTONE u. H. SNYDER: Phys. Rev. 88, 1190 (1952). — [2] CAIANIELLO, E. R. u. A. TURRIN: Nuovo Cimento 10, 594 (1953). — [3] CAIANIELLO, E. R.: Nuovo Cimento 10, 581 (1953). — [4] ROSE, M. E.: Phys. Rev. 53, 392 (1938). — [5] DÄLLENBACH, W.: Ann. d. Phys. 3, 89 (1948). — Weitere Literatur: WIDERÖE, R.: Schweizer Archiv f. angewandte Wiss. u. Techn. 13, 225 (1947). — BLACHMANN, N. M.: Rev. Scient. Instr. 2, 569 (1951). — LE COUTEUR, K. J.: Proc. Phys. Soc. B 6, 1073 (1951). — HOYAUX, M.: Atomics (London) 2, 310 (1951). — DE PACKH, D. C.: Phys. Rev. 86, 433 (1952). — HOYAUX, M.: Atomics 3, 33 (1952). — SIMONE, C.: Elektr. Obz. 41, 36 (1952). — SANDS, M. u. B. TOSCHEK: Nuovo Cimento 10, 604 (1953). — KITAGAKI, T.: Phys. Rev. 89, 1161 (1953). — COURANT, E. D., M. S. LIVINGSTONE, H. S. SNYDER u. J. P. BLEWETT: Phys. Rev. 91, 202 (1953). — COURANT, E. D.: Phys. Rev. 91, 456 (1953). — LUNDQUIST, STIG: Phys. Rev. 91, 981 (1953). — GOOD, MYRON L.: Phys. Rev. 92, 53 (1953). — CARLSON, B. C.: Phys. Rev. 92, 839 (1953). — CORK, B. u. E. ZAJEC: Phys. Rev. 92, 853 (1953). — BELLE, J. S.: Nature 171, 167 (1953). — ADAMS, J. B., M. G. N. HIN u. J. C. LAWSON: Nature 171, 926 (1953). — LIVINGSTONE, M. S.: Nucleonics 11, 12 (1953). — HAYASHI, CHIHRO: J. appl. Phys. 24, 344 (1953). — PIPES, L. A.: J. appl. Phys. 24, 902 (1953). — BLEWETT, M. H.: Rev. Sci. Instr. 24, 72 (1953). — BLUMENTHAL, I. S.: Amer. J. Phys. 21, 164 (1953). — PAUL, W. u. H. STEINWEDEL: Z. Naturforsch. 8a, 44 (1953). — BODENSTEDT, E.: Z. Naturforsch. 8a, 502 (1953). — SEIDEN, J.: C. R. Acad. Sci. (Paris) 236, 1145 (1953). — LÜDERS, G.: Phys. Verh. 4, 149 (1953).

Dr.-Ing. WALTER DÄLLENBACH, Bern, Hallwylstraße 46.

Buchbesprechungen.

Physikertagung Innsbruck. Hauptvorträge von der gemeinsamen Jahrestagung 1953 des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften und der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft, herausgegeben von H. AUER, E. BRÜCHE, R. STEINMAURER. Mosbach/Baden: Physik-Verlag 1954. 138 S. Geb. DM 19,20.

Das Bändchen enthält die auf der Innsbrucker Physikertagung von W. KLEEN, CH. SCHMELZER, G. JOOS, E. MÜLLER, R. OCHSENFELD, M. KERSTEN, A. PETERLIN, O. KRATKY, A. UNSÖLD und W. KROEBEL gehaltenen zusammenfassenden Vorträge. Der Vortrag von G. JOOS ist allerdings nur auszugsweise wiedergegeben, weil er ausführlich in der Zeitschrift für angewandte Physik erschienen ist. Auch der Vortrag von KERSTEN ist, auf den neuesten Stand gebracht, in einer Zeitschrift im Druck. Es ist zweifellos zu begrüßen, daß die größtenteils sehr wertvollen Vorträge im Druck erscheinen konnten. Der Physik-Verlag nimmt in Aussicht, auch in den kommenden Jahren eine entsprechende Schrift herauszugeben. So sehr das Verdienst des Verlags zu würdigen ist, daß auf diese Weise die wertvollen zusammenfassenden Vorträge gesammelt erscheinen, so ist doch das Bedenken nicht ganz von der Hand zu weisen, daß sie auf diese Weise weniger Publizität gewinnen, als wenn sie in einer der bisher bestehenden Zeitschriften erscheinen, es sei denn, daß sich daraus eine neue Art von Jahrbuch entwickelt. G. HETTNER.

Ramsauer, C.: Grundversuche der Physik in historischer Darstellung I. Band. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1953. 185 S. mit 129 Abb. Geb. DM 10,80.

Die Idee ist gut, durch die Ausführungsart kommt sie aber nicht zu ihrer vollen pädagogischen Wirkung. Diese ist aber das Hauptanliegen des Verfassers, nicht das historische (oder gar geistesgeschichtliche); denn nicht überall wird auf die Originalarbeiten zurückgegriffen. Beinstanden wird, daß in vielen Pionierarbeiten enthaltene Unvollkommenheiten und Fehler gebracht werden, ihre Erkennung und spätere Aufklärung aber nicht beachtet wird. Wer die spätere Entwicklung der „Grundversuche“ nicht schon vorher kennt, wird also leicht zu fehlerhaften Vorstellungen geführt. Einige Beispiele; S. 62 Atomstrahlversuche von OTTO STERN. Es fehlt die sehr wichtige, später von STERN angebrachte Korrektur, weil nicht die mitt-

lere Molekulargeschwindigkeit gemessen wird. „Man könnte nicht, die MAXWELLSche Geschwindigkeitskurve experimentell nachprüfen“, sondern STERN hat die Geschwindigkeitsverteilung experimentell gemessen. Die experimentelle Bestimmung der freien Weglänge (BORN-BORMANN) fehlt. — S. 8: Polarisation des Lichtes: es fehlt der (auch nach MAX V. LAUE in seiner Geschichte der Physik) ganz wesentliche Anteil von ARAGO, auch das BREWSTERsche Gesetz. S. 86 ff. KIRCHHOFFs Strahlungsgesetz: die erste Verwirklichung des KIRCHHOFFschen schwarzen Strahlers war PASCHENS erhitzter Metallstreifen im Zentrum einer spiegelnden Halbkugel; dann kam LUMMER-WIENS schwarzer Körper. FRAUNHOFER war doch mehr als ein „praktischer Optiker“! — Die beschriebene Lichtquelle ist das DRUMMOND'sche Kalklicht (1826), nicht ein „Argandbrenner“. S. 91 ff. Strahlungsdruck: LEBEDEWS hoch zusehende Versuche sind noch stark durch positive und negative Radiometereffekte gefälscht. Die einzig quantitative Messung stammt von GERLACH und GOLSEN 1924. Daß der experimentelle Lichtdrucknachweis die Grundlage für die Energie-Masse-Äquivalenz ist, geht wohl zu weit! S. 112. OERSTED hat das Wort „elektrischer Strom“ nicht „vermieden“, es wurde erst nachher von AMPÈRE geprägt. Bei der Besprechung von OHMS Arbeit S. 123 fehlt die (m. E.) wichtigste und von OHM auch so angesehene Ableitung des Spannungsabfalls im geschlossenen Leiterkreis.

S. 159 — FARADAYS Diamagnetismus — bringt den alten offenbar nicht auszurottenden Fehler, daß ein diamagnetisches Stäbchen im homogenen Magnetfeld sich senkrecht zu den Kraftlinien einstelle. Da das Drehmoment durch κ^2 gegeben ist, besteht kein Unterschied zwischen para- und diamagnetischen Körpern (warum wird statt „paramagnetisch“ immer nur „magnetisch“ gesagt?). Ebenso stimmt die FARADAYSche Erklärung des Diamagnetismus der Flammengase (S. 161) nicht. Alles ist mehrfach veröffentlicht. Auch die vom Verfasser gegebene Formulierung über dia- und paramagnetische Reaktion (translatorische Kraft) (S. 161 unten) gilt nur für ein inhomogenes Feld.

Referent ist der Ansicht, daß durch Ergänzen und Korrektur im genannten Sinn der Wert des Buches für „Lehrer und Schüler der höheren Schulen“ (s. Einführung) wesentlich gewinnen könnte. WALTHER GERLACH.